



**HAL**  
open science

# Investigations expérimentales et modélisations numériques par la méthode de Lattice Boltzmann (LBM) pour l'étude des transferts dans les écoulements tourbillonnaires

Wafik Abassi

► **To cite this version:**

Wafik Abassi. Investigations expérimentales et modélisations numériques par la méthode de Lattice Boltzmann (LBM) pour l'étude des transferts dans les écoulements tourbillonnaires. Génie des procédés. Université de Nantes, 2014. Français. NNT: . tel-01262729

**HAL Id: tel-01262729**

**<https://imt-atlantique.hal.science/tel-01262729>**

Submitted on 27 Jan 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE SPIGA

Année 2014

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Investigations expérimentales et modélisations numériques  
par la méthode de Lattice Boltzmann (LBM) pour l'étude des  
transferts dans les écoulements tourbillonnaires

THÈSE DE DOCTORAT  
Discipline : Génie des Procédés  
Spécialité : *Mécanique des fluides et Transferts*

*Présentée  
et soutenue publiquement par*

**Wafik ABASSI**

*Le 06 Juin 2014, devant le jury composé de :*

Président	François MONNOYER	<i>Professeur à l'Université de Valenciennes</i>
Rapporteurs	Mohammed SOUHAR Hassen ABBASSI	<i>Professeur à l'INPL, Nancy Professeur à l'Université de Sfax, Tunisie</i>
Examineurs	Fethi ALOUI Jack LEGRAND Abdelmajid JEMNI Sassi BEN NASRALLAH	<i>Professeur à l'Université de Valenciennes Professeur à l'Université de Nantes Professeur à l'ENIM, Université de Monastir, Tunisie Professeur à l'ENIM, Université de Monastir, Tunisie</i>
Invités	Vačlav SOBOLIK Philippe MANDIN Abdelhak AMBARI	<i>Professeur à l'Université de La Rochelle Professeur à l'Université de Bretagne Sud Professeur à l'ENSAM ParisTech - Centre d'Angers</i>

*Directeur de thèse : Fethi ALOUI  
Co-directeur : Sassi BEN NASRALLAH*



## **Dédicaces**

*A mes chers parents*

*A mon frère et mes sœurs*

*A ma femme*

*"Le succès n'est pas la clé du bonheur. Le bonheur est la clé du succès. Si vous aimez ce que vous faites, vous réussirez."*

**Albert SCHWEITZER**



## Remerciements

*« Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent du bonheur ; elles sont les charmants jardiniers par qui nos âmes sont fleuries »*

**Marcel Proust**

*Je dédie ces lignes à tous ceux qui m'ont permis de mener à bien mes travaux de recherche et ont contribué à la réalisation de ce travail. Je tiens à dire un grand Merci aux personnes qui ont cru en moi et qui m'ont permis d'arriver au bout de cette thèse.*

*En premier lieu, je remercie mon directeur de recherches, Monsieur Fethi ALOUI et mon co-directeur, Monsieur Sassi Ben NASRALLAH pour leurs soutiens tout au long de ce travail. Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur Fethi ALOUI, qui fut pour moi un directeur de thèse attentif et disponible malgré ses nombreuses charges. Sa compétence, sa rigueur scientifique et sa clairvoyance m'ont beaucoup appris. La confiance et l'autonomie qu'il m'a accordé volontiers m'ont fait progresser sur le plan personnel, et m'ont rendu plus optimiste et plus ambitieux ; ils ont été et resteront des moteurs de mon travail de chercheur.*

*J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur Sassi Ben NASRALLAH, en tant que co-directeur de cette thèse. Il a joué un rôle important dans ma formation depuis mon parcours au cycle d'ingénieurs jusqu'à ma soutenance de thèse. Sa curiosité scientifique extrêmement vaste, ainsi que sa rigueur et son esprit critique m'ont éclairci la voie de la recherche. Que ces quelques mots puissent leur exprimer la gratitude et la profonde admiration que j'ai eue à leur égard.*

*Je remercie tous les membres de l'équipe DSEE pour leur chaleureux accueil et leur enthousiasme ainsi que les moments qu'on a partagé ensemble au cours de ma première année de thèse. Je tiens à remercier particulièrement Dominique Briand pour sa disponibilité et son immense sympathie.*

*Je tiens à remercier également les membres du laboratoire LESTE de l'École Nationale d'Ingénieurs de Monastir (ENIM) pour leurs encouragements et leurs soutiens malgré la distance qui nous a séparées.*

*Mes remerciements vont également aux membres du laboratoire TEMPO et tout particulièrement aux membres de l'équipe DF2T pour leur hospitalité dont ils ont fait preuve envers moi durant les deux années passées sur place lors de la réalisation de mes travaux expérimentaux.*

*Mon jury de thèse a également contribué à ma thèse en portant un regard critique et constructif sur ce travail. Je remercie tous les membres sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est par les discussions que j'ai eu la chance d'avoir avec eux et leurs suggestions pertinentes. En particulier, Monsieur Mohammed SOUHAR et Monsieur Hassen ABBASSI qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Leurs remarques et suggestions ont permis d'améliorer la qualité de ce mémoire, et je leur en suis très reconnaissant.*

*Je remercie vivement Monsieur François MONNOYER, responsable de l'équipe DF2T au laboratoire TEMPO (Université de Valenciennes), qui de plus m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je remercie également, Messieurs Jack LEGRAND et Abdelmajid JEMNI qui m'ont fait l'honneur d'accepter de faire partie du jury et d'évaluer et enrichir ce travail par leurs conseils constructifs.*

*La présence de Monsieur Vaclav SOBOLIK, Monsieur Abdelhak AMBARI et Monsieur Philippe MANDIN, m'a très honorée et je les remercie vivement d'avoir accepté de faire partie du jury et d'évaluer ce travail.*

*Je remercie tous les membres du département de Génie Civile à l'IUT de Saint-Nazaire, avec qui j'ai passé mon premier ATER et qui m'ont permis de cultiver mon expérience pédagogique.*

*Enfin à tous ceux que j'ai côtoyés aux deux laboratoires GEPEA (Nantes) et TEMPO (Valenciennes) au fil de ces années de thèses. Je remercie tous mes amis Tunisiens de l'École Nationale d'Ingénieurs de Monastir (ENIM), mes amis du laboratoire LESTE (Monastir, Tunisie), du GEPEA au DSEE (École des Mines de Nantes) ainsi que mes amis du laboratoire TEMPO (équipe DF2T) de l'université de Valenciennes. J'ai une pensée pour mes professeurs du cycle d'Ingénieurs (ENIM), à Monastir.*

*Je remercie mes parents pour leur soutien inconditionnel tout au long de mes études et surtout pour tout ce qu'ils m'ont donné. Je remercie ma femme, pour m'avoir encouragée et pour avoir fait le choix difficile pour être à mes côtés au moment d'avancer vers de nouveaux projets.*

*Wafik*



# TABLES DES MATIERES

Nomenclature.....	I
Liste des figures.....	V
Liste des Tableaux.....	XI

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

## Chapitre I : Présentation de la méthode de Boltzmann sur réseau

1.1	Introduction .....	5
1.2	Méthode de Lattice Boltzmann .....	5
1.2.1	Formulation de la méthode Lattice Boltzmann .....	5
1.2.2	Equation de Boltzmann sur réseau .....	6
1.2.3	Fonction de distribution à l'équilibre .....	9
1.2.4	Opérateur de collision .....	11
1.2.4.1	.. Approximation BGK.....	11
1.2.4.2	...Relaxation à temps multiples MRT.....	12
1.2.4.3	.. Modèle de relaxation à temps double TRT.....	15
1.2.5	Modèles de Lattice (réseaux).....	16
1.2.5.1	Modèles bidimensionnels.....	18
1.2.5.2	Modèles tridimensionnels.....	19
1.3	Équation macroscopiques à partir de L'équation de Boltzmann.....	20
1.3.1	Conditions initiales et aux limites pour les écoulements.....	20
1.3.1.1	Conditions initiales.....	21
1.3.1.2	Conditions aux limites pour les écoulements.....	21
a.	Condition de rebond arrière (Bounce Back) : .....	21
b.	Condition à la limite avec vitesse non nulle et connue : .....	23
c.	Condition à la limite ouverte .....	26
d.	Condition à la limite périodique.....	27
e.	Condition de symétrie.....	27
1.3.1.3	Conditions aux limites massiques.....	28
a.	Conditions aux limites avec concentration imposées (condition de Dirichlet) .....	28
b.	Conditions zéro gradient .....	30

c. Conditions aux limites de flux constant .....	30
1.3.2 Correspondance entre unités LBM et unités physiques.....	31
1.4 Avantages et inconvénients de la LBM.....	31
1.5 Conclusion.....	32

## **Chapitre II : Etat de l'art sur des exemples d'écoulements tourbillonnaires : Écoulement autour d'un obstacle et écoulement de Couette-Taylor**

2.1 Écoulement autour d'un obstacle en milieu confiné.....	35
2.1.1 Introduction : Intérêt pratiques .....	35
2.1.2 Dynamique de l'écoulement.....	37
2.1.2.1 Équations gouvernant l'écoulement .....	37
2.1.2.2 Régimes d'écoulement .....	39
a- Régime rampant .....	39
b- Régime de recirculation .....	39
c- Régime périodique .....	39
d- Instabilités tridimensionnelles.....	41
e- Régime sub-critique .....	46
2.1.2.3 Paramètres de contrôle de l'écoulement.....	46
a- Vitesse de l'écoulement à l'entrée.....	46
b- Paramètre de gap.....	46
c- Rapport du confinement .....	48
2.2 Écoulement de Couette Taylor.....	50
2.2.1 Introduction et historique .....	50
2.2.2 Dynamique de l'écoulement.....	51
2.2.2.1 Critère de Rayleigh.....	52
2.2.2.2 Paramètres de contrôle de l'écoulement.....	53
a- Paramètres géométriques.....	53
b- Paramètres d'inertie .....	54
c- Paramètres visqueux.....	54
2.2.3 Régimes d'écoulement d'une configuration rotor-stator.....	54
2.2.3.1 Régime laminaire azimutal.....	55
2.2.3.2 Régime des vortex de Taylor.....	55
2.2.3.3 Régime des vortex de Taylor ondulés (WVF).....	56
2.2.3.4 Régime des vortex de Taylor ondulés modulés (MWVF).....	58
2.2.3.5 Régime de turbulence « Turbulent Taylor Vortices » (TTV).....	59
2.2.4 Paramètres influents sur les instabilités.....	60
2.3 Méthodes électrochimiques.....	62
2.3.1 Introduction .....	62

2.3.2 Etat de l'art de la méthode .....	62
2.3.3.1 Principe de la méthode .....	62
2.3.3.2 Solution polarographique .....	64
2.3.3.3 Sondes polarographiques.....	65
2.3.3.4 Tension de polarisation .....	66
2.3.3 Détermination du gradient pariétal de vitesse .....	67
2.3.3.1 Équations du problème.....	67
2.3.3.2 Réponse des sondes polarographiques en régime permanent.....	69
2.3.3.3 Réponse des sondes polarographiques en régime instationnaire.....	71
2.3.3.3.1 Méthode quasi-stationnaire .....	72
2.3.3.3.2 Méthode de Sobolik et al. (1987) .....	72
2.3.3.3.3 Fonctions de transfert .....	73
a- Approche analytique.....	73
b- Approche numérique.....	74
2.3.3.3.4 Méthode inverse .....	77
2.3.3.4 Détermination du gradient pariétal de vitesse par la sonde triple.....	79
2.4 Conclusion.....	81
Conclusion sur le chapitre d'analyse bibliographique .....	82

### **Chapitre III- Simulation numérique des écoulements et des transferts par la méthode de Lattice Boltzmann**

3.1 Introduction.....	83
3.2 Simulation par LBM de la dynamique de l'écoulement autour d'un obstacle en milieu confiné. ....	83
3.2.1 Formulation LB .....	84
3.2.1.1 Etapes du calcul.....	84
3.2.1.2 Conditions aux limites LB.....	86
a. Conditions de non-glissement aux parois.....	87
b. Condition à l'entrée du canal (vitesse connue).....	87
c. Condition à la sortie du canal .....	89
3.2.2.3 Algorithme de Calcul .....	89
3.2.2.4 Interface de dialogue .....	90
3.2.2 Simulation de la dynamique de l'écoulement bidimensionnel de Poiseuille .....	92
3.2.3.1 Solution analytique.....	92
3.2.3.2 Résultat numérique LBM .....	93
3.2.3 Simulation de l'écoulement bidimensionnel autour d'un obstacle dans un milieu confiné. ....	95
3.2.3.1 Configurations géométriques du problème.....	95

3.2.3.2	Résultats LBM.....	96
3.2.3.2.1	Régimes d'écoulements.....	96
	a- Obstacle carré.....	96
	b- Obstacle circulaire.....	101
3.2.3.2.2	Influence des paramètres LB .....	110
3.2.4	Simulation numérique de l'écoulement tridimensionnel autour d'un barreau dans un milieu confiné.....	113
3.2.4.1	Configuration géométrique du problème.....	113
3.2.4.2	Résultats LBM.....	114
3.2.4.2.1	Écoulement dans un canal sans obstacle .....	114
3.2.4.2.2	Régimes d'écoulements.....	116
3.2.4.2.3	Effets des parois latérales .....	119
3.2.4.3	Évaluation du temps de calcul.....	121
3.3	Simulation numérique du transfert massique pariétal .....	122
3.4.1	Equation de Boltzmann sur réseau pour le transfert de masse .....	123
3.4.2	Algorithme de calcul de l'écoulement et du transfert.....	125
3.4.3	Interface de dialogue .....	126
3.4.4	Résultats de la simulation numérique par LBM.....	127
3.3.4.1	Simulation du transfert pariétal .....	127
3.3.4.1.1	Configuration géométrique.....	127
3.3.4.1.2	Solution Analytique de Lévêque et profil de concentration.....	128
3.3.4.2	Simulation du transfert de masse pariétal dans le sillage d'un obstacle.....	131
3.3.4.1.4	Contours de concentration.....	134
3.3.4.1.5	Influence de la variation des paramètres géométriques.....	135
3.4	Conclusion.....	138

## **Chapitre IV- Dispositifs expérimentaux et techniques de mesures**

4.1	Introduction .....	141
4.2	Dispositif expérimental de l'écoulement autour d'un obstacle : banc hydraulique.....	141
4.3	Dispositif expérimental de Couette-Taylor .....	144
4.4	Techniques expérimentales utilisées .....	151
4.4.1	Visualisation qualitative .....	151
4.4.2	Vélocimétrie par Image de Particules (PIV).....	153
4.4.2.1	Principe de la PIV .....	154
4.4.2.2	Éléments constitutifs du dispositif PIV.....	155
4.4.3	Méthode polarographique.....	158

4.4.3.1 Réactifs électrochimiques : solution polarographique.....	158
4.4.3.2 Tension de polarisation.....	159
4.4.3.3 Coefficient de diffusion moléculaire de la solution polarographique.....	161
4.4.3.4 Sondes polarographiques.....	162
4.4.4 Synchronisation des mesures de PIV et d'électrochimie.....	167
4.5 Conclusion.....	169

## Chapitre V : Étude expérimentale des écoulements tourbillonnaires et des transferts

5.1 Introduction .....	171
5.2 Étude d'un écoulement autour d'un obstacle carré dans un canal hydraulique.....	171
5.2.1 Topologie de l'écoulement .....	172
5.2.2 Analyse des structures tourbillonnaires .....	177
5.2.2.1 Critère de vorticité .....	177
5.2.2.2 Critère Q.....	179
5.2.2.3 Critère $\Gamma_2$ .....	180
5.2.3 Décomposition POD de l'écoulement.....	183
5.2.3.1 Principe de la décomposition orthogonale en modes propres.....	180
5.3 Étude expérimentale d'un écoulement de Couette Taylor.....	186
5.3.1 Étude qualitative: Visualisation de l'écoulement .....	187
5.3.3.1 Régime d'écoulement de Couette-Taylor .....	188
a- Régime des vortex de Taylor (Taylor Vortex Flow: TVF) .....	188
b- Régime des vortex de Taylor ondulés (Wavy Vortex Flow: WVF) .....	189
c- Régime des vortex de Taylor ondulés modulés (Modulated Wavy Vortex Flow: MWVF) ..	193
d- Régime turbulent des vortex de Taylor turbulents (Taylor Turbulent Vortex Flow: TTVF)	194
5.3.3.2 Régime d'écoulement de Couette-Poiseuille.....	196
a-Visualisation d'un écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille (protocole direct).....	197
b-Protocole inverse.....	200
5.3.3.3 Régime turbulent avec écoulement axial.....	203
5.3.3.4 Conclusion.....	207
5.3.2 Étude quantitative de l'écoulement de Couette-Taylor par la technique de Vélocimétrie par images de particules (PIV) .....	208
5.3.2.1 Dynamique de l'écoulement de Couette-Taylor en régime WVF.....	208
a- Régime d'écoulement WVF sans débit axial .....	209
b- Régime d'écoulement WVF avec débit axial.....	213

5.3.3 Mesures synchronisées par PIV et par polarographie dans le dispositif de Couette-Taylor ...	216
5.3.3.1 Mesures électrochimiques .....	216
5.3.3.2 Détermination du gradient pariétal de vitesse à partir des mesures électrochimiques .....	220
5.3.3.3 Réponse d'une sonde électrochimique triple ou tri-segmentée .....	222
5.3.3.3.1 Effet d'une vitesse de rotation variable sur la réponse de la sonde triple.....	223
5.3.3.4 Comparaison entre le gradient pariétal obtenu à partir des mesures par PIV et celui issu des mesures électrochimiques.....	227
5.4 Conclusion.....	229
Conclusion générale .....	231
Références bibliographiques.....	235
<b>Annexes</b>	
Annexe A.....	241
Annexe B.....	247

## NOMENCLATURES

a	$a = dc/dt$	Accélération Lattice
$A_s$		Surface active de la sonde électrochimique
c		Vitesse lattice
$c_s$		Vitesse du son
$C_0$		Concentration de l'espèce active loin de l'électrode
d		Diamètre (/ hauteur) de l'obstacle
ds		Diamètre de la sonde circulaire
D		Coefficient de diffusion
$D\alpha Q\beta$		Nom du Lattice ( $\alpha$ : dimension, $\beta$ nombre de directions)
e		Epaisseur de l'espace annulaire (SCT)
$e(x,t)$		Energie interne
$e_i$		Direction du Lattice
f		Fonction de distribution
$f^{eq}$		Fonction de distribution à l'équilibre
$f_i^{ne}$		Fonction de distribution non-équilibré
$f_i^+$		Fonction de distribution post collision
F		Force externe
$F$		constante de Faraday
g		Fonction de distribution relative au transfert
G	$G = \pi \gamma \theta m / \eta \Omega.$	Moment adimensionnel
h		Hauteur du canal
H		Hauteur du SCT
i, j		Compteurs
$i\alpha$		Courant électrochimique
I		Courant de Levich
k		Coefficient de transfert de masse
K		Paramètre de cisaillement
l		Longueur de la sonde
L		Longueur caractéristique
$\vec{L}$		Tenseur Lattice
Lr		Longueur de recirculation
m		masse
$m$	$m = M f$	Moment de vecteur
M		Matrice de relaxation
Ma		Nombre de Mach
n		Nombre de direction lattice
P		Pression
Pe	$Pe = \frac{\bar{S}l^2}{D}$	Nombre de Peclet
q		Compteur
Q		Débit nominal
r	$r = \frac{d}{h}$	Rapport de confinement
$R_i$		Rayon du cylindre interne
$R_e$		Rayon du cylindre externe
Re	$Re = \frac{Ud}{\nu}$	Nombre de Reynolds
Re	$Re = \frac{\tau_v}{\tau_i} = \frac{\Omega_i R_i d_e}{\nu}$	Reynolds Couette Taylor
Rec		Nombre de Reynolds critique
S		Matrice diagonale

St	$St = \frac{fU}{D}$	Nombre de Strouhal
Sc	$Sc = \frac{\nu}{D}$	Nombre de Schmidt
S	$S(x, t) = \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{y=0}$	Gradient pariétal
Sh		Nombre de Sherwood
t		Temps
T		Température
Ta	$T_a = \frac{\tau_v}{\tau_f} = \frac{\Omega_i R_i d_e}{\nu} \sqrt{\frac{d_e}{R_i}}$	Nombre de Taylor
Tac		Nombre de Taylor critique
Ta*	$T_a^* = \frac{T_a}{T_{ac}}$	Nombre de Taylor relatif au Taylor critique
U, V		Composantes de vitesse
$U_d$		Vitesse débitante
$U_p$		Tension de polarisation
$v$		Champs de vitesse
$w_i$		Coefficients de pondération
x		Vecteur spatial
<i>Symboles</i>		
$\delta$	$\delta = \frac{R_e - R_i}{R_i}$	Rayon de courbure
$\delta t$		Pas temporel
$\Delta$		Distance par rapport à la paroi la plus proche
$\varepsilon$		Nombre de Knudsen
$\gamma$	$\gamma = \frac{\Delta}{D}$	Paramètre de gap
$\gamma_\alpha$		Gradient pariétal de vitesse
$\Gamma$	$\Gamma = \frac{h}{R_e - R_i}$	Rapport d'aspect
$\Gamma_2$		Critère de détection de structure cohérente
$\lambda^+$	$\lambda^+ = \frac{\delta t}{\tau^+}$	Premier temps de relaxation (TRT)
$\lambda^-$	$\lambda^- = \frac{\delta t}{\tau^-}$	Second temps de relaxation (TRT)
$\lambda$		Libre parcours moyen
$\Lambda$		Magic
$\eta$	$\eta = \frac{R_i}{R_e}$	Le rapport radial
$\Omega(f)$		Opérateur de collision
$\Omega_0$		Vitesse angulaire du cylindre interne
$\Omega_e$		Vitesse angulaire du cylindre externe
$\rho$		Densité macroscopique
$\sigma$		Section de collision
$\sigma_{rect}$		Fréquence adimensionnelle
$\tau$		Temps de relaxation
$\mu$	$\mu = \frac{\Omega_e}{\Omega_i} = 0$	Rapport des vitesses de rotation
$\tau_i$	$\tau_i = \frac{d_e}{\Omega_i R_i}$	Échelle de temps relative à la non-linéarité inertielle

$\tau_f$	$\tau_f = \frac{1}{\Omega_i} \sqrt{\frac{d_e}{R_i}}$	Echelle de temps relative à la force centrifuge
$\tau_v$		Échelle de temps associée à la dissipation visqueuse
$\nu$	$\tau_v = \frac{d_e^2}{\nu}$	Viscosité cinématique
$\omega$		Vorticité

### Indices

g	Transfert
p	Physique
o	Initiale
d	Adimensionnelle
itmax	Itération maximale
lb	Lattice Boltzamann
f	Fluide
exp	Expérimentale
num	Numérique

### Abréviation

NS	Navier-Stokes
EDP	Equations aux derives particles
CFD	Computational fluid dynamics
FVM	Finite volume method
FDM	Finite difference Method
LGCA	lattice gas cellular automata
LBM	Lattice Boltzmann method
LBE	Lattice Boltzmann equation
BGK	Modèle de Bhatnagar, Gross et Krook
MRT	Multiple relaxation time
TRT	Two relaxation time
FHP	Modèle de Frisch, Hasslacher et Pomeau
HPP	Modèle Hardy, Pomeau et Pazzis
PIV	Particles Images Velocity
SCT	Système de Couette-Taylor
CF	Couette flow (Regime laminaire)
TVF	Régime de vortex de Taylor (Taylor Vortex Flow)
WVF	Régime de vortex de Taylor ondulés (Wavy Vortex Flow)
MWVF	Régime de vortex de Taylor ondulés modulés (Modulated Wavy Vortex Flow)
TTF	Régime turbulent (Turbulent Taylor Flow)
FFT	Fast Fourier Transformation



## LISTE DES FIGURES

- Figure 1.1** : Modèle bidimensionnel D2Q5  
**Figure 1.2** : Modèle bidimensionnel D2Q9  
**Figure 1.3** : Modèle tridimensionnel D3Q15  
**Figure 1.4** : Modèle tridimensionnel D3Q19  
**Figure 1.5** : Schéma du Bounce Back « rebond arrière » (I)  
**Figure 1.6** : Schéma du Bounce Back « rebond arrière » (II)  
**Figure 1.7** : Schéma du Bounce Back « rebond arrière » (III)  
**Figure 1.8** : Fonctions de distribution aux limites  
**Figure 1.9** : Conditions à la limite périodique  
**Figure 1.10** Condition de symétrie  
**Figure 1.11** : Fonctions de distribution au niveau des parois fixes  
**Figure 2.1** : Photographie d'un sillage d'un avion  
**Figure 2.2** : Instabilité de von-Karman dans le sillage d'une île (Goddard Space Flight Center)  
**Figure 2.3** : Géométrie d'étude de l'obstacle en milieu confiné  
**Figure 2.4** : Vitesse longitudinale le long de la paroi supérieure pour  $Re = 100$  (Guerrouache, 2000)  
**Figure 2.5** : Courbe de  $St = f(Re)$  et localisation du mode A et du mode B  
**Figure 2.6** : Visualisations de Williamson (1996b) et instabilités tridimensionnelles cylindre circulaire: mode A et mode B  
**Figure 2.7** : Sillage de l'obstacle carré ( placé à gauche des photographies) pour différents nombres de Reynolds l'écoulement est de gauche à droite (Xiaohu, 2003)  
**Figure 2.8** : Évolution des structures tourbillonnaires au niveau de mode A. L'écoulement est selon la direction x (Luo et al., 2007)  
**Figure 2.9** : Évolution des structures tourbillonnaires au niveau de mode B. L'écoulement est selon la direction x (Luo et al., 2007)  
**Figure 2.10** : Évolution du nombre de Reynolds critique en fonction du paramètre de gap (Zovatto et Pedrezetti, 2001)  
**Figure 2.11** : Schématisation du Dispositif de Couette-Taylor  
**Figure 2.12** : Vortex contrarotatifs et axisymétriques de Taylor-Couette : a) Schématisation ; b) Visualisation en utilisant le dioxyde de titane et des paillettes de mica (Lueptow et al., 2002)  
**Figure 2.13** : Vortex contrarotatifs du régime ondulé de Taylor ou WVF : a) schématisation ; b) visualisation de l'écoulement (Lueptow et al., 2002)  
**Figure 2.14** : Spectre fréquentiel de la vitesse radiale  $\eta = 0.877$ ,  $\Gamma = 20$  (WVF) (Fenstermacher et al., 1979)  
**Figure 2.15** : Évolution du nombre d'onde azimutal en fonction du nombre de Taylor en régime WVF ( $\eta=0,91$  ;  $\Gamma=44,3$ ) selon Mehel (2006)  
**Figure 2.16** : a) Visualisation par technique Kalliroscope de la transition MWVF ; b) Spectre fréquentiel de la vitesse radiale  $\eta = 0.877$ ,  $\Gamma=20$  (Fenstermacher et al., 1979) :  $\omega_1$  et  $\omega_3$  fréquences fondamentales  $\omega_2$  fréquence résultante  
**Figure 2.17** : Évolution du nombre d'onde azimutal en fonction du nombre de Taylor pour les régime (WVF) et (MWVF) ( $\eta=0,91$  ;  $\Gamma=44,3$ ) selon Mehel (2006)  
**Figure 2.18** : a) Visualisation par technique Kalliroscope de la transition TTF ; b)- Spectre fréquentiel de la vitesse radiale  $\eta=0.877$ ,  $\Gamma = 20$  (Fenstermacher et al., 1979)  
**Figure 2.19** : Principe de la méthode polarographique  
**Figure 2.20** : Vue d'ensemble d'une sonde triple : a) Idéale ; b) sonde triple réelle utilisée dans notre dispositif (Berrich, 2011)  
**Figure 2.21** : Courbe d'évolution du courant de diffusion en fonction de la tension de polarisation : polarogramme  
**Figure 2.22** : Courbe d'évolution du nombre de Sherwood en fonction du nombre de Peclet en régime permanent pour une sonde simple (Rehimi, 2006)  
**Figure 2.23** : Amplitude et phase de la fonction de transfert d'une sonde simple soumise à des fluctuations longitudinales (Zidouh, 2007)

**Figure 2.24** : Amplitude et phase de la fonction de transfert d'une sonde simple (rectangulaire et circulaire) (Delouis, 1989.b)

**Figure 2.25** : Organigramme de l'algorithme séquentiel mis en place par Réhimi et al. (2008)

**Figure 3.1** : Modèle de réseau D2Q9 et D2Q19 placés dans une grille spatiale

**Figure 3.2** : Bounce-Back paroi nord du canal

**Figure 3.3** : Fonction de distribution à l'entrée du canal

**Figure 3.4** : Fonction de distribution à la sortie du canal

**Figure 3.5** : Interface de Dialogue utilisateur : 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> étape choix de l'étude et définition des paramètres du problème

**Figure 3.6** : Interface de Dialogue utilisateur : 3<sup>ème</sup> étape choix de la géométrie de l'obstacle

**Figure 3.7** : Interface de Dialogue utilisateur : 4<sup>ème</sup> étape définition du temps de calcul

**Figure 3.8** : Profil de vitesse numérique (LBM) à  $x = L/2$  superposé à la solution analytique (60x600 nœuds)

**Figure 3.9** : Configuration géométriques et conditions aux limites (physiques et LB) dans le cas d'un obstacle de forme carré.

**Figure 3.10** : Lignes de courant et Iso contour de la composante axiale de la vitesse pour un Reynolds  $Re = 5$

**Figure 3.11** : Lignes de courant et Iso contour de la composante axiale de la vitesse et de la vortacité pour un Reynolds  $Re = 50$

**Figure 3.12** : Lignes de courant et Iso contour de la composante axiale de la vitesse et de la vortacité et pour un Reynolds  $Re = 80$

**Figure 3.13** : Lignes de courant et Iso contour de la composante axiale de la vitesse et de la vortacité et pour un Reynolds  $Re = 120$

**Figure 3.14** : Lignes de courant autour de l'obstacle carré pour différents nombres de Reynolds : a)  $Re = 5$  ; b)  $Re = 50$  ; c)  $Re = 80$  ; d)  $Re = 120$

**Figure 3.15** : Profils instantanés de vitesse axiale le long des parois supérieure et inférieure pour deux Reynolds différents : a)  $Re = 80$  ; b)  $Re = 120$

**Figure 3.16** : Contours de la composante axiale de vitesse pris à des instants différents du calcul ( $Re = 100$ )

**Figure 3.17** : Contours de vortacité pris à des instants différents du calcul ( $Re = 100$ )

**Figure 3.18** : Lignes de courant et Iso contour de la composante axiale de la vitesse pour un Reynolds  $Re = 5$

**Figure 3.19** : Lignes de courant et Iso contour de la composante axiale de la vitesse pour un Reynolds  $Re = 50$

**Figure 3.20** : Lignes de courant et Iso contour de la composante axiale de la vitesse et de la vortacité pour un Reynolds  $Re = 80$

**Figure 3.21** : Lignes de courant et Iso contour de la composante axiale de la vitesse et de la vortacité pour un Reynolds  $Re = 120$

**Figure 3.22** : Lignes de courant autour de l'obstacle circulaire pour différents nombres de Reynolds : a)  $Re = 5$  ; b)  $Re = 50$  ; c)  $Re = 80$  ; d)  $Re = 120$

**Figure 3.23** : Profil de la vitesse le long de la ligne centrale pour les deux types d'obstacles.

**Figure 3.24** : Profil de la vitesse de la ligne centrale dans le cas d'une géométrie circulaire de l'obstacle

**Figure 3.25** : Profil de la vitesse le long de la ligne centrale pour différents nombres de Reynolds dans la zone proche obstacle

**Figure 3.26** : Variation de la longueur de recirculation moyenne  $L_r$  (adimensionné par  $D$ ) en fonction du nombre de  $Re$  (Obstacle circulaire)

**Figure 3.27** : Variation de la longueur de recirculation moyenne  $L_r$  (adimensionné par le diamètre) en fonction du nombre de  $Re$  dans le cas d'un obstacle carré et d'un obstacle circulaire

**Figure 3.28** : Profils instantanés de la vitesse axiale le long des parois supérieure et inférieure du canal pour deux Reynolds différents : a)  $Re = 80$  ; b)  $Re = 120$

**Figure 3.29** : Profils instantanés de vitesse axiale le long des parois inférieure du canal dans le cas d'un obstacle carré et circulaire pour  $Re = 120$  (distance  $\Delta y$  par rapport à la paroi)

**Figure 3.30** : Évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds pour un obstacle circulaire

**Figure 3.31** : Évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds pour un obstacle circulaire et obstacle carré

**Figure 3.32** : Évolution de la longueur de recirculation moyenne  $L_r$  en fonction du nombre de Re pour trois tailles de grilles différentes : a) cas d'un obstacle circulaire ; b) cas d'un obstacle carré

**Figure 3.33** : Profil de vitesse sur la ligne centrale horizontale du canal pour trois grille de tailles différentes dans le cas d'un obstacle de géométrie circulaire  $Re=50$

**Figure 3.34** : Évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds pour trois tailles de grilles différentes dans le cas d'une géométrie circulaire et carré de l'obstacle comparée aux résultats numériques de Cartes(1994) et de Guerrouache (2000)

**Figure 3.35** : Configuration géométrique tridimensionnelle du problème

**Figure 3.36** : Profil de la composante  $U_x$  de vitesse sur la section centrale verticale du canal ( $Z=0$ ) à  $X=L/2$

**Figure 3.37** : Profil de la composante  $U_x$  de vitesse sur la section centrale horizontale du canal ( $Y=0$ ) à  $X=L/2$

**Figure 3.38** : Contours de la composante  $U_x$  de vitesse sur la section centrale horizontale ( $Y=0$ ) et verticale ( $Z=0$ ) du canal et lignes de courant pour  $Re=5$

**Figure 3.39** : Contours de la composante  $U_x$  de vitesse sur la section centrale horizontale ( $Y=0$ ) et verticale ( $Z=0$ ) du canal et lignes de courant pour  $Re=50$

**Figure 3.40** : Contours de la composante  $U_x$  de vitesse sur la section centrale horizontale ( $Y=0$ ) et verticale ( $Z=0$ ) du canal et lignes de courant pour  $Re=120$

**Figure 3.41** : Lignes de courant autour de l'obstacle circulaire pour différents nombres de Reynolds : a)  $Re=5$  ; b)  $Re=50$  ; c)  $Re=80$  ; d)  $Re=120$

**Figure 3.42** : Iso contours de vorticité sur des coupes verticales de l'écoulement à  $Re=120$ ; (a) plan  $Y=0$  ; b)  $Y=-1D$  ; c)  $Y=-2D$

**Figure 3.43** : Iso-surface de vorticité à  $Re=120$  : Largeur du canal  $l_1=3H$

**Figure 3.44** : Iso-surface de vorticité à  $Re=120$  : Largeur du canal  $l_2=1.5H$

**Figure 3.45** Profils instantanés de vitesse axiale pour deux largeurs de canal différentes au point le plus proche des parois à  $Re=120$  : a) paroi supérieure ; b) paroi inférieure

**Figure 3.46** : Anti-Bounce-Back sur la sonde placée sur la paroi sud du canal

**Figure 3.47** : Interface de Dialogue utilisateur : 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> étape choix de l'étude et définition des paramètres du problème

**Figure 3.48** : Interface de Dialogue utilisateur : 3<sup>ème</sup> étape choix de la géométrie de l'obstacle

**Figure 3.49** : Saisie des paramètres relatifs au transfert de masse

**Figure 3.50** : Définition du temps de calcul et du temps d'échantillonnage

**Figure 3.51** : Configuration géométriques et conditions aux limites (physiques et LB) du problème étudié

**Figure 3.52** : Variation du nombre de Sherwood en fonction du nombre de Peclet  $Pe$  ( $10^{-3}<Pe<10^6$ ).

**Figure 3.53** Variation du nombre de Sherwood en fonction du nombre de Peclet (littérature)

**Figure 3.54** Iso-surface de concentration autour de la sonde pour deux Peclet différents : a)  $Pe=10^{-4}$  ; b)  $Pe=10^{-1}$

**Figure 3.55** : Configuration du problème étudié

**Figure 3.56** : Contours de vorticité instantanés et lignes de courant obtenus par LBM pour  $Re=100$  et  $r=1/4$

**Figure 3.57** : Contours de vorticité instantanés et lignes de courant obtenus par LBM pour  $Re=200$  et  $r=1/4$

**Figure 3.58** : Variation du gradient moyen de la vitesse à  $Re=100$  (obstacle à  $x/D=0$ )  $Re=100$  ( $r=1/4$  et  $\Delta=1/2$ )

**Figure 3.59** : Profils de gradient de vitesse normalisé  $S/S_0$  pour différents nombre de Reynolds ( $r=1/4$ )

**Figure 3.60** : Iso-Contours de concentration sur une sonde placée à une distance:  $x=4.1D$  de l'obstacle : a)  $Re=50$ ; b)  $Re=100$  ; c)  $Re=200$

**Figure 3.61** : Effet de  $Re$  sur le transfert de masse pour sur une sonde placée à : a)  $x/d=1.9$  ; b)  $x/d=4.1$  ; c)  $x/d=8.4$  pour deux positions de l'obstacle : (I)  $D/h=0.5$  et (II)  $D/h=0.25$

**Figure 3.62** : Effet de la position de la sonde polarographique par rapport à l'obstacle sur le transfert de masse :  $R=100$

**Figure 4.1** : Schéma de l'installation expérimentale du canal hydraulique

**Figure 4.2** Profil de vitesse de rotation par rapport à la tension d'alimentation du moteur

**Figure 4.3** : Plan de conception du dispositif de Couette Taylor (Berrich, 2011) : a) Vue de face du dispositif ; b) Vue de dessus ; c) Vue de dessous

**Figure.4.4** : Vue d'ensemble de l'installation expérimentale de Couette-Taylor : a) Coupe face du dispositif ; b) Coupe plan (A-A) ; c) photographie du dispositif

**Figure.4.5** : Disposition des sondes électrochimiques sur la paroi du cylindre externe

**Figure.4.6** : Photos de l'installation expérimentale (vue globale)

**Figure.4.7** : Photos de l'écoulementensemencé au kalliroscope à 1% : a) Vue globale ; b) plan (r,z) éclairé par une nappe laser

**Figure.4.8** : Principe de la technique PIV pour un écoulement de Couette-Taylor

**Figure 4.9** : Photographie du laser Nd-YAG pulsé Quanta-Ray (capot ouvert)

**Figure 4.10** : Caméra « PowerView Plus »

**Figure 4.11** : Exemples de polarogrammes pour des sondes horizontales et verticales simples ( $Ta=40$ )

**Figure 4.12** : Polarogrammes d'une sonde simple pour deux régimes différents ( $Ta=40$  et  $Ta=650$ )

**Figure 4.13** : Polarogrammes des courants limites de diffusion délivrés par une sonde triple en fonction de la tension de polarisation  $U_p$  ( $Ta=40$ )

**Figure 4.14** : Évolution du courant de Levich (1962) en fonction de la vitesse de rotation du disque (Berrich, 2011)

**Figure 4.15** : Photos des dispositions des sondes simples : a) Rangée horizontale ; b) Rangée verticale; c) Sonde triple

**Figure 4.16** : Sonde circulaire simple utilisée : a) Géométrie idéale ; b) Microphotographie d'une sonde réelle (Berrich, 2011)

**Figure 4.17** : Réponse d'une sonde électrochimique à un échelon de tension (sonde n°3)

**Figure 4.18** : Asymptote de Cottrell (sonde n°3)

**Figure 4.19** : Principe de la technique de synchronisation PIV-électrochimie pour un écoulement de Couette-Taylor

**Figure 4.20** : Signal TTL superposé à la réponse des sondes électrochimiques

**Figure 5.1** : Profil de la composante  $U_x$  de vitesse au centre de la section sur la hauteur de la conduite dans le plan ( $Z=0$ )

**Figure 5.2** : Iso-contours de la composante axiale de vitesse et lignes de courant  $Re=50$  : a) Résultat expérimental ; b) Résultats LBM

**Figure 5.3** : Iso-contours de la composante axiale de vitesse et lignes de courant  $Re=80$  : a) Résultat expérimental ; b) Résultats LBM

**Figure 5.4** : Iso-contours de la composante axiale de vitesse et lignes de courant  $Re=120$  : a) Résultat expérimental ; b) Résultats LBM

**Figure 5.5** : Profils des composantes axiale et radiale de vitesse obtenus expérimentalement et numériquement à des distances différentes de l'obstacle : a)  $x/D=2$  ; b)  $x/D=5$  et c)  $x/D=7$

**Figure 5.6** : Profils de la composante axiale moyenne de vitesse le long de la ligne centrale : Comparaison entre les résultats expérimentaux et ceux numériques issus de la LBM dans la zone proche de l'obstacle

**Figure 5.7** : Variation de la longueur de recirculation moyenne  $L_r$  en fonction du nombre de  $Re$  superposée aux résultats LBM

**Figure 5.8** : Iso-contours et lignes de courant expérimentaux pour Reynolds  $Re=90$  : a) Vitesse axiale ; b) Champ de vortacité

**Figure 5.9** : Profils de vortacité (expérience et simulation) le long de la ligne centrale du canal hydraulique pour  $Re=90$

**Figure 5.10** : Critère de détection  $Q$  pour  $Re=90$  : a) Champs PIV ; b) Champs LBM

**Figure 5.11** : Critère de détection  $\Gamma_2$  pour  $Re=90$  et phénomène de coalescence dans la zone proche de l'obstacle : a) Champs PIV ; b) Champs LBM;

**Figure 5.12** : Critère de détection  $\Gamma_2$   $Re=90$  dans la zone éloignée de l'obstacle : a) Champs PIV ; b) Champs LBM

**Figure 5.13** : Profils du critère  $\Gamma_2$  le long de la ligne centrale horizontale du canal hydraulique pour  $Re=90$ , appliqué à un champ expérimental obtenu par PIV et champ numérique obtenu par la LBM

**Figure 5.14** : Les premiers quatre modes obtenus dans le sillage de l'obstacle pour  $Re=90$

**Figure 5.15** : Distribution de l'énergie pour les différents modes

**Figure 5.16** : Régime de vortex de Taylor  $Ta \approx 47$ ,  $Ta^* = 1,03$  : a) Visualisation globale des vortex de Taylor ; b) Coupe laser plan des vortex de Taylor

**Figure 5.17** : Visualisation globale des rouleaux de Taylor en régime de vortex ondulés WVF : a)  $Ta < 300$  ou  $Ta^* < 6,6$  ; b)  $300 < Ta < 600$  ou  $6,6 < Ta^* < 13,2$

**Figure 5.18** : Évolution temporelle des vortex de Taylor dans le plan (r, z) en régime WVF  $Ta = 76,6$

**Figure 5.19** : Évolution temporelle des vortex de Taylor dans le plan (r, z) en régime WVF  $Ta = 127,9$

**Figure 5.20** : Évolution temporelle des vortex de Taylor dans le plan (r,z) en régime WVF  $Ta = 383,9$

**Figure 5.21** : Visualisation globale des vortex de Taylor en régime de vortex de Taylor ondulé modulé MWVF ; a)  $Ta^* = 11,23$  ; b)  $Ta^* = 14,06$  ; c)  $Ta^* = 21,06$

**Figure 5.22** : Évolution temporelle des vortex de Taylor dans le plan (r,z) en régime MWVF  $Ta = 767$

**Figure 5.23** Visualisation globale des vortex de Taylor en régime turbulent

**Figure 5.24** : Évolution temporelle des vortex de Taylor dans le plan (r,z) en régime TTVF  $Ta = 1500$

**Figure 5.25** : Écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille à  $t_1 = 20s$  pour  $Ta = 100$  ; a)  $Re_{ax} = 1,49$  ; b)  $Re_{ax} = 34,32$  ; c)  $Re_{ax} = 57,2$  ; d)  $Re_{ax} = 120$

**Figure 5.26** : Évolution temporelle de l'écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille pour  $Ta = 100$  et  $Re_{ax} = 34,32$

**Figure 5.27** : Écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille dans le plan (r,z) de l'entrefer à  $t_0 = 10s$  pour  $Ta = 100$  : a)  $Re_{ax} = 1,49$  ; b)  $Re_{ax} = 34,32$  ; c)  $Re_{ax} = 57,2$  ; d)  $Re_{ax} = 120$

**Figure 5.28** : Évolution temporelle des structures de l'écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille dans le plan (r,z) de l'entrefer pour  $Ta = 100$  et  $Re_{ax} = 35$

**Figure 5.29** : Visualisation de l'écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille dans le plan (r,z) dans l'entrefer lors du protocole inverse pour  $t_2 = 70 s$  et pour  $Re_{ax} = 34$  : a)  $Ta = 46$  ; b)  $Ta = 77$  ; c)  $Ta = 120$  ; d)  $Ta = 384$  ; e)  $Ta = 680$

**Figure 5.30** : Évolution temporelle d'un écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille dans le plan (r,z) de l'entrefer pour  $Ta = 120$  en protocole inverse

**Figure 5.31** : Écoulement de Couette-Taylor turbulent  $Ta = 1228$  avec écoulement axial superposé (protocole direct) : a)  $Re_{ax} = 34,32$  ; b)  $Re_{ax} = 57,2$  ; c)  $Re_{ax} = 120$  à  $t_0 = 30s$

**Figure 5.32** : Visualisations temporelle des instabilités dans le plan (r,z) d'un écoulement turbulent de Couette-Taylor à  $Ta = 1228$ , superposé à un écoulement axial (protocole direct) pour  $Re_{ax} = 120$  (photographies à différents instants).

**Figure 5.33** : Visualisations des instabilités dans le plan (r,z) d'un écoulement turbulent de Couette-Taylor  $Ta = 1228$ , superposé à un écoulement axial (protocole direct) pour  $Re_{ax} = 120$

**Figure 5.34** : Écoulements axiaux (pour : a)  $Re_{ax} = 34$  ; b)  $Re_{ax} = 57$  et c)  $Re_{ax} = 120$ , superposés à un écoulement de Couette-Taylor turbulent ( $Ta = 1200$ ) : Photographies prises à l'instant :  $t_0 = 30 s$

**Figure 5.35** : Écoulements axiaux (pour : a)  $Re_{ax} = 34$  ; b)  $Re_{ax} = 57$  et c)  $Re_{ax} = 120$ ), superposés à un écoulement de Couette-Taylor turbulent ( $Ta = 1200$ ) : Photographies prises à l'instant :  $t_0 = 60 s$

**Figure 5.36** : Visualisations des instabilités dans le plan (r,z) d'un écoulement axial pour  $Re_{ax} = 120$ , superposé à un écoulement turbulent de Couette-Taylor (protocole inverse) avec  $Ta = 1228$

**Figure 5.37** : Exemple de champ de vitesse instantané obtenu par PIV (superposé au contour de vortacité) pour  $Ta = 120$  et sans écoulement axial

**Figure 5.38** : Évolution spatio-temporelle des iso-contours de la composante axiale (U) de vitesse par PIV à  $Ta = 120$  sans écoulement axial

**Figure 5.39** : Évolution spatio-temporelle des iso-contours de la composante radiale (V) de vitesse obtenue par PIV à  $Ta = 120$  et sans écoulement axial

**Figure 5.40** : Évolution spatio-temporelle des iso-contours de la vortacité obtenues à partir des champs instantanés de vitesse mesurés par PIV pour  $Ta = 120$  sans écoulement axial

**Figure 5.41** : Évolution spatio-temporelle des iso-contours du critère  $\Gamma_2$  pour  $Ta = 120$  et sans écoulement axial

**Figure 5.42** : Champ de vitesse instantané issu des mesures par PIV à  $Ta = 120$  avec écoulement axial (superposé aux contours de vortacité)

**Figure 5.43** : Évolution spatio-temporelle des iso-contours de la composante radiale de vitesse (U) à  $Ta = 120$  avec écoulement axial  $Re_{ax} = 80$

**Figure 5.44** : Évolution spatio-temporelle des iso-contours de la composante radiale de vitesse ( $V$ ) à  $Ta = 120$  avec écoulement axial  $Re_{ax}=80$

**Figure 5.45** : Évolution spatio-temporelle des iso-contours de Vorticité  $\omega$  à  $Ta=120$  avec écoulement axial  $Re_{ax}=80$

**Figure 5.46** : Évolution spatio-temporelle des iso-contours du critère  $\Gamma_2$  à  $Ta=120$  avec écoulement axial  $Re_{ax}=80$

**Figure 5.47** Courants limites de diffusion délivrés par les différentes sondes électrochimiques :  
A gauche : sans écoulement axial ; A droite : avec écoulement axial où  $Re_{ax}=63$

**Figure 5.48** : Spectre fréquentiel caractéristique du régime WVF (a) première plage pour  $Ta=120$  ;  
b) 2<sup>ème</sup> plage pour  $Ta=300$

**Figure 5.49** : Spectre fréquentiel caractéristique du régime MWVF  $Ta=900$

**Figure 5.50** Exemple d'évolution temporelle du gradient pariétal de vitesse déterminé à partir des méthodes de Levêque et de Sobolik et al. (1987) pour  $Ta=300$

**Figure 5.51** : Évolution du gradient pariétal de vitesse et du nombre de Sherwood correspondant en fonction du temps pour  $Ta=300$

**Figure 5.52** : Évolutions temporelles des composantes axiale et azimutale du gradient pariétal de vitesse ainsi que celui du module, déterminé par la méthode de Sobolik et al. (1987) à  $Ta=300$  en utilisant une sonde triple : A gauche :  $Re_{ax}=63$  ; A droite :  $Re_{ax}=120$

**Figure 5.53** : Évolution temporelle (nombre de Taylor) du mouvement imposé au cylindre mobile :  
a) Mouvement sinusoïdal ; b) Mouvement sous forme d'une rampe ; c) Mouvement sous forme d'un signal carré

**Figure 5.54** : Évolutions temporelles des composantes et du module du gradient pariétal de vitesse, déterminés par la méthode de Sobolik et al. (1987) en utilisant la sonde triple :  
a) Mouvement sinusoïdal du cylindre mobile ; b) Mouvement sous forme d'une rampe du cylindre mobile

**Figure 5.55** : Évolution temporelle du module du gradient pariétal de vitesse et de ses composantes, déterminés par la méthode de Sobolik et al. (1987) en utilisant la sonde triple (variation brusque du nombre de Taylor)

**Figure 5.56** : Évolution temporelle de la composante axiale du gradient pariétal de vitesse déterminé par la méthode de Sobolik et al. (1987) comparé à celui obtenu par PIV (synchronisation PIV-électrochimie)

## LISTE DES TABLEAUX

**Tableau 1 :** Évolution du nombre de Strouhal en fonction du confinement pour un obstacle circulaire (Guerrouache, 2000)

**Tableau 2 :** Vitesses Lattice dans les différentes directions du réseau du modèle D2Q9

**Tableau 3 :** Vitesses Lattice dans les différentes directions du réseau du modèle D3Q19

**Tableau 4 :** Schéma de l'algorithme général de calcul par LBM

**Tableau 5 :** Précision de la solution LBM par rapport à la solution analytique et temps d'itération nécessaire pour trois grilles de tailles différentes

**Tableau 6 :** Grilles utilisées pour les simulations LBM et temps de calcul nécessaire

**Tableau 7 :** Grilles utilisées pour les simulations LBM 3D et temps de calcul nécessaire

**Tableau 8 :** Schéma de l'algorithme général pour le calcul simultané de la dynamique et du transfert par LBM

**Tableau 9:** Caractéristique du laser Nd-YAG pulsé Quanta-Ray

**Tableau 10:** Caractéristique de la solution électrochimique utilisée

**Tableau 11:** Caractéristique d'une sonde simple circulaire utilisée

**Tableau 12:** Valeurs des diamètres actifs (en mm) des sondes du SCT utilisé, estimés par l'asymptote de Cottrell et comparée à ceux obtenu par Berrich (2011)

**Tableau 13:** Caractéristique de la sonde circulaire tri-segmentée utilisée



## Introduction générale

Les problèmes d'écoulement tourbillonnaires de fluides sont très courants dans notre vie quotidienne : l'écoulement de l'eau des rivières, le mouvement de l'air dans l'atmosphère, les courants de l'océan, les sillages, les jets, sont tous des exemples d'écoulements tourbillonnaires. Les études systématiques de la dynamique des fluides ont été menées depuis le 18<sup>ème</sup> siècle. La théorie de la dynamique des fluides représentée par les équations de Navier-Stokes (NS) a été établie afin de décrire l'écoulement du fluide depuis le milieu du 19<sup>ème</sup> siècle. Cependant, les équations de NS ne peuvent pas être résolues sans avoir recours à des hypothèses simplificatrices ; ce qui nous oblige à utiliser des moyens expérimentaux ou numériques pour l'étude des problèmes de mécanique des fluides. Ce n'est seulement au cours des dernières décennies, avec l'apparition de calculateurs puissants, qu'on a commencé à résoudre les équations de Navier-stokes. Depuis, beaucoup de méthodes numériques ont été mises en place.

La résolution de ces systèmes d'équations reste, néanmoins, une tâche difficile. Beaucoup d'efforts doivent donc être investis dans l'élaboration d'approches numériques pour la résolution de ces équations.

Une méthode basée sur une modélisation à une échelle mésoscopique de l'écoulement, a connu un grand essor durant les dernières décennies. Cette méthode, qui découle directement de la théorie cinétique des gaz, est couramment appelée LBM (Lattice Boltzmann Method ou Boltzmann sur réseau), du fait qu'elle se base sur la résolution de l'équation cinétique de Boltzmann sur un réseau donné.

En raison de sa nature cinétique, la LBM fournit quelques mérites par rapport aux autres méthodes classiques de simulations numériques des écoulements de fluides (CFD). Outre son algorithme aisé qui est essentiellement basé sur deux grandes boucles de calcul, le caractère explicite et non itératif de la LBM la rend adaptée au calcul parallèle (Chen et al., 1996).

Récemment, la LBM a connu de très grands progrès dans les domaines de la dynamique des fluides et se présente alors comme une alternative attrayante aux autres méthodes classiques de CFD.

Le présent travail s'intègre donc entièrement dans cette perspective et constitue une contribution à la mise en place d'outils expérimentaux et de simulation numérique pour l'étude des écoulements tourbillonnaires et des transferts massiques pariétaux. Ces outils seront utilisés pour l'étude et la compréhension des écoulements tourbillonnaires et des transferts obtenus derrière un obstacle et entre deux cylindres coaxiaux, dont l'un est fixe et l'autre est mobile.

Afin d'orienter convenablement le lecteur, ce rapport s'organise en cinq chapitres différents. Une première partie, qui est consacrée à la synthèse bibliographique, a été scindée en deux chapitres. Un premier chapitre portant sur la présentation de la méthode de Lattice Boltzmann et de son développement. Les différentes équations utilisées, les différents types de réseaux et les méthodes d'implémentation des conditions aux limites ont été présentées. Les avantages de la LBM par rapport aux méthodes classiques de CFD seront par la suite soulignés.

Le deuxième chapitre présente une revue bibliographique des écoulements tourbillonnaires. Nous présentons, en premier lieu, les écoulements autour d'un obstacle. Nous présentons ainsi les différents régimes d'écoulement obtenus en faisant varier les différents paramètres.

En second lieu, nous proposons une étude bibliographique portant sur les écoulements de type Système de Couette-Taylor (SCT), caractérisés par leur richesse en instabilités. Nous commençons tout d'abord, par la présentation de quelques applications industrielles mettant en évidence l'utilité de ce type d'écoulement. Par la suite, nous présentons une description de l'écoulement de Couette-Taylor ainsi que les équations gouvernant le problème. Les principaux paramètres de contrôle influant sur les mécanismes du développement et de l'apparition des vortex de Taylor seront mis également en évidence.

Finalement, une partie est consacrée à la description des mécanismes d'interaction vortex-parois qui confinent l'écoulement. Dans cette optique, nous détaillerons en particulier la méthode polarographique permettant la détermination des composantes du gradient pariétal de vitesse et par conséquent, l'empreinte pariétale des vortex.

Le troisième chapitre présente essentiellement la démarche utilisée pour le développement d'un code de simulation numérique, se basant sur la méthode de Lattice Boltzmann (LBM). Ce chapitre, comprend quatre parties selon le problème traité. Une première partie permettra de présenter le code de calcul de simulation dynamique bidimensionnelle de l'écoulement.

Deux géométries différentes d'obstacles sont adoptées, afin de pouvoir comparer les résultats numériques obtenus dans les deux configurations. Une analyse des résultats en termes de

régimes d'écoulement et aussi en termes d'influence des paramètres physiques et numériques est présentée.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée la simulation de la dynamique de l'écoulement dans une configuration tridimensionnelle autour d'un barreau placé horizontalement dans un canal rectangulaire. L'effet des parois latérales sur le comportement du sillage, a été souligné.

La troisième partie est consacrée au développement de l'algorithme séquentiel pour la simulation du transfert massique au niveau d'une paroi du canal. L'algorithme de simulation est alors associé à celui de la simulation de la dynamique tourbillonnaire. Les résultats de simulations ainsi obtenus, permettent alors d'analyser l'effet de la présence d'un obstacle et ainsi les instabilités générées sur le transfert de masse pariétal.

Le quatrième chapitre de ce manuscrit est consacré à la présentation des dispositifs ainsi que les différentes techniques de mesures utilisées lors des travaux expérimentaux réalisés dans cette thèse. La première partie présente les différents éléments qui composent le dispositif expérimental permettant d'effectuer des mesures derrière un cylindre en milieu confiné. La seconde partie est consacrée à la présentation du dispositif expérimental, permettant l'étude d'un écoulement de Couette-Taylor. La dernière partie présente les différentes techniques expérimentales utilisées pour effectuer les mesures. Une technique qualitative de visualisation des instabilités de l'écoulement, par des particules de Kalliroscope. La vélocimétrie par Images de particule (PIV) pour la mesure des champs de vitesse. La méthode polarographique, utilisant donc des sondes électrochimiques (simples ou triples) et permettant de caractériser les interactions tourbillons-paroi.

Le dernier chapitre est consacré à l'exploitation de l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus. Deux parties distinctes constituent alors ce chapitre. La première partie concerne le post-traitement des mesures brutes de PIV obtenues dans le sillage d'un obstacle de géométrie carrée. Les résultats ainsi obtenus sont alors comparés à ceux par simulation numérique, grâce à la LBM afin de vérifier la validité ainsi que les performances de cette méthode numérique.

La seconde partie consiste à l'exploitation des différentes mesures obtenues sur le dispositif expérimental de Couette-Taylor (SCT). La topologie des écoulements de Couette-Taylor du régime laminaire jusqu'au régime turbulent est ainsi présentée grâce à des visualisations par des particules de Kalliroscope. Dans cette étude qualitative, l'effet de la superposition d'un écoulement axial dans l'entrefer sur l'évolution des instabilités est alors analysé.

Par la suite, nous présenterons les mesures obtenues par la technique de PIV, qui ont permis de quantifier les instabilités ainsi générées. Finalement, nous clôturons ce chapitre par l'étude de l'interaction tourbillon-paroi en utilisant simultanément la réponse des sondes simples et triples synchronisée à la technique de mesures par la technique de PIV.

Ce manuscrit s'achève par une conclusion générale résumant l'essentiel du travail effectué durant cette thèse, ainsi que quelques perspectives qui pourraient être envisagées pour la poursuite éventuelle de ce travail.

## **-Chapitre I-**

Présentation de la méthode de  
Boltzmann sur réseau



## 1.1 Introduction

La méthode de Lattice Boltzmann (LBM) est le successeur de la méthode des gaz sur réseaux LGCA. Par conséquent, elle retient les avantages de cette méthode mais a conservé aussi quelques inconvénients. Considérée comme étant une méthode numérique discrète à une échelle mesoscopique, la LBM représente un écoulement d'un fluide par un ensemble de particules se propageant dans les nœuds d'un réseau régulier tout en vérifiant les lois de conservation de la masse et la quantité de mouvement.

Au cours de cette première partie, notre étude portera, tout d'abord, sur la formulation de l'équation de Lattice Boltzmann (LBE). Les aspects fondamentaux de la méthode Lattice Boltzmann seront ensuite explicités afin de faire ressortir les notions importantes pour la simulation de la dynamique tourbillonnaire d'un fluide. L'avantage de l'utilisation de la LBM par rapport aux méthodes classiques de CFD, sera souligné par la suite.

## 1.2 Méthode de Lattice Boltzmann

### 1.2.1 Formulation de la méthode Lattice Boltzmann

La caractéristique, probablement, la plus importante de la méthode Boltzmann sur réseau, est la discrétisation dans l'espace des vitesses ; ce qui signifie que les vitesses des particules sont limitées à un ensemble d'orientations fini.

Notons par  $m$  le nombre de directions discrètes à chaque point du réseau. A chaque pas de temps, les particules se déplacent le long de leurs directions correspondantes, vers le point proche du maillage (le terme réseau est généralement préféré dans la littérature LBM que le terme maillage). Si en plus, une de ces particules arrive simultanément à un même point du réseau, la formule de collision est alors appliquée, qui est, en effet, une redistribution des particules selon les lois de conservation (de masse et de quantité de mouvement). En résumé, les étapes de calcul sont simples :

A chaque pas de temps, et pour chaque point du réseau, il existe :

- une étape de propagation (streaming),
- une étape de collision.

**Note :** Il n'est pas important d'appliquer la collision avant le streaming ou vice-versa. Ce qui importe, c'est qu'ils soient répétés alternativement.

Une perspective utile pour la simulation de fluides devient évidente après une moyenne de densité et de la quantité de mouvement sur certaines régions de l'espace (une procédure connue sous le nom coarse-graining).

Il existe aussi une procédure alternative pour obtenir les champs macroscopiques ( $\rho, v, \dots$ ) qui est la méthode de moyennes d'ensemble. Il s'agit de calculer la moyenne d'ensemble des nombres d'occupation dans chaque direction à un point ( $x$ ) spécifique du réseau ce qui nous donne un nombre réel  $f_i$  tel que  $i = 1, \dots, m$ .

Chaque  $f_i$  représente la probabilité que le site ( $x$ ) ait une particule de la direction  $i$  et à l'instant  $t$ . Ces quantités sont appelées fonctions de distribution discrètes et sont considérées comme le maillon essentiel pour les méthodes Lattice Boltzmann.

Ces fonctions  $f(x, c, t)$  définies tel que :  $f(x, c, t) d^3x d^3c$  représente la masse totale des particules se trouvant dans le volume  $d^3x$  autour d'une position  $x$  animés d'une vitesse  $c$  à l'instant  $t$ .

Cette approximation reste valable pour des petits éléments de volumes  $d^3x d^3c$  contenant un large nombre de particules.

Les principales différences entre la LBM et son antécédente, la méthode LGCA (Lattice-Gas Cellular Automata) est que les variables booléennes de la LGCA (Wolf-Gladrow, (2000)) sont remplacées par des fonctions de distribution discrètes  $f_i(x)$  dans la LBM.

En outre, contrairement à LGCA, la LBM se caractérise par un large choix de réseau, généralement classés dans la littérature noté par  $D_n Q_m$ , où  $n$  un nombre entier indiquant le nombre de dimensions d'espace et  $m$  le nombre de vitesses discrètes (y compris les particules au repos).

### 1.2.2 Equation de Boltzmann sur réseau

Afin de mieux comprendre la méthode de Lattice Boltzmann, on présentera dans ce qui suit brièvement l'équation de Boltzmann.

Si on considère une force extérieure  $F$  qui s'applique sur des molécules gazeuses, la vitesse de ces dernières change pendant  $dt$  de  $c$  à  $c + Fdt$  et leurs directions de  $x$  à  $x + cdt$ .

En absence de collision entre particule, le nombre de molécules est conservé.

Ceci se traduit au niveau des fonctions de distribution qui reste invariant entre  $t$  et  $t + dt$  soit :

$$f(x + cdt, c + Fdt, t + dt)dxdc - f(x, c, t)dxdc = 0 \quad (1.1)$$

Cependant, s'il y a collision entre les molécules, l'équation d'évolution du nombre de molécules s'écrit:

$$f(x + cdt, c + Fdt, t + dt)dxdc - f(x, c, t)dxdc = \Omega(f)dxdc dt \quad (1.2)$$

$\Omega(f)$  est le terme de collision. On divise l'équation précédente par  $dx dc dt$  et on fait tendre la limite de  $dt$  vers 0, on aura donc :

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(x+cdt, c+Fdt, t+dt)dxdc - f(x, c, t)dxdc}{dxdc dt} = \frac{df}{dt} = \Omega(f) \quad (1.3)$$

Comme  $f$  est fonction de  $x$ ,  $c$  et  $t$ , on peut écrire la variation totale de  $f$  comme suit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial c} dc + \frac{\partial f}{\partial t} dt \quad (1.4)$$

En divisant par  $dt$ , on obtient :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{dc}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.5)$$

Le vecteur  $x$  s'exprime dans un repère de coordonnées cartésiennes en tridimensionnel comme suit :

$$x = x_i + x_j + x_k \quad (1.6)$$

Où  $i$ ,  $j$  et  $k$  sont les vecteurs unitaires dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement.

L'équation(1.5), s'écrit donc :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} c + \frac{\partial f}{\partial c} a + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.7)$$

$a = \frac{dc}{dt}$  est l'accélération qui peut être reliée à la force par la deuxième loi de Newton :

$$a = \frac{F}{m} \quad (1.8)$$

L'équation de Boltzmann s'écrit donc en combinant les équations (1.3) et (1.7):

$$\frac{\partial f}{\partial x} c + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{F}{m} + \frac{\partial f}{\partial t} = \Omega \quad (1.9)$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial c}$  sont en fait des gradients :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \nabla_x f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{pmatrix} \quad (1.10a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \nabla_c f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial c_i} \\ \frac{\partial f}{\partial c_j} \\ \frac{\partial f}{\partial c_k} \end{pmatrix} \quad (1.10b)$$

En utilisant cette écriture, l'équation de Boltzmann devient :

$$c \cdot \nabla_x f + \frac{F}{m} \cdot \nabla_c f + \frac{\partial f}{\partial t} = \Omega \quad (1.11)$$

Pour un système où les forces extérieures sont négligeables, l'équation de Boltzmann s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \nabla_x f = \Omega \quad (1.12)$$

Les quantités macroscopiques comme la masse volumique du fluide, la vitesse macroscopique  $\mathbf{u}_0$  et l'énergie interne  $e$  sont exprimés en fonction des moments de la fonction de distribution  $f$ :

$$\rho(x, t) = \int f(x, c, t) dc \quad (1.13)$$

$$\rho(x, t) \mathbf{u}(x, t) = \int c f(x, c, t) dc \quad (1.14)$$

$$\rho(x, t) e(x, t) = \int u_0^2 f(x, c, t) dc \quad (1.15)$$

Où l'intégration s'effectue sur tous l'espace des vitesses.

A partir de la théorie cinétique, pour des gaz monoatomiques, l'énergie interne peut être reliée à la densité par :

$$\rho e = \frac{D}{2m} \rho kT \quad (1.16)$$

D : est la dimension du problème

L'équation d'état s'écrit sous la forme :

$$P = \rho c_s^2 \quad (1.17)$$

Où  $P$  est la pression et  $c_s$  et la vitesse du son.

### 1.2.3 Fonction de distribution à l'équilibre

La notion de la fonction de distribution à l'état d'équilibre est primordiale au niveau de la récupération des équations décrivant le comportement hydrodynamique du fluide à partir de l'équation de Boltzmann. En appliquant le théorème H (Annexe1) on montre que la fonction de distribution à l'équilibre s'écrit dans le cas général sous la forme :

$$f^{eq} = K \exp(A + Bc + Cc^2) \quad (1.18)$$

Avec A, B et C sont des coefficients déterminés à partir des expressions de  $\rho$ ,  $u$  et  $e$ .

L'expression obtenue de la fonction de distribution s'écrit sous la forme :

$$f^{eq} = a e^{-\frac{(c-u)^2}{2RT}} \quad (1.19)$$

Avec  $a$  constantes à déterminer,  $u$  et  $T$  sont respectivement la vitesse et la température.

Afin de déterminer la constante  $a$  on considère le cas où la vitesse macroscopique  $u$  est nulle, on aura ;

$$f^{eq} = a e^{-\frac{c^2}{2RT}} \quad (1.20)$$

D'autre part le moment d'ordre 0 s'écrit (annexe2) :

$$\int f^{eq} dc = \rho \quad (1.21)$$

Sachant que :

$$\int e^{-\alpha c^2} dc = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} \quad (1.22)$$

On aura alors:

$$\int a e^{-\frac{c^2}{2RT}} dc = a(\pi 2RT)^{3/2} = \rho \quad (1.23)$$

Ceci implique que :

$$a = \frac{\rho}{(\pi 2RT)^{3/2}} \quad (1.24)$$

D'où on aura l'expression de la fonction de distribution d'équilibre sous la forme d'une fonction de Maxwell :

$$f^{eq} = \frac{\rho}{(\pi 2RT)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(c-u)^2}{2RT} \right] \quad (1.25)$$

La fonction de distribution à l'équilibre introduite dans l'équation de Boltzmann est obtenue en effectuant un développement en série de Taylor de la fonction Maxwellienne  $f^{eq}$  à l'ordre  $O(u^2)$  :

$$f^{eq} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(c-u)^2}{2RT} \right] \quad (1.26)$$

$$f^{eq} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{c^2}{2RT} \right] \exp \left[ \frac{2c \cdot u - u^2}{2RT} \right]$$

$$f^{eq} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{c^2}{2RT} \right] \left( 1 + \frac{c \cdot u}{RT} - \frac{u^2}{2RT} + \frac{1}{2} \left( \frac{c \cdot u}{RT} \right)^2 \right) + O(u^3)$$

En récrivant l'équation (1.26) sous sa forme discrète dans l'espace de vitesse  $\{e_i\}$  et en notant selon l'équation (1.17) que  $c_s^2 = RT$ , on obtient l'expression de la fonction de distribution à l'équilibre :

$$f_i^{eq} = \rho w_i \left[ 1 + \frac{e_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_i \cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{u^2}{2c_s^2} \right] (i = 0, 1, \dots, n) \quad (1.27)$$

Où  $n$  est le nombre de direction de vitesse du réseau et  $w_i$  les facteurs de pondération tel

$$\text{que : } w_i = (2\pi RT)^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{e_i^2}{2RT}\right]$$

## 1.2.4 Opérateur de collision

### 1.2.4.1 Approximation BGK

L'équation classique de Boltzmann est une équation différentielle de la fonction de distribution  $f$  qui s'écrit selon (1.11) en présence de force  $F'$  (par unité de masse) :

$$c \cdot \nabla_r f + F \cdot \nabla_c f + \frac{\partial f}{\partial t} = \Omega \quad (1.28)$$

Avec  $\Omega$  l'intégrale de collision qui décrit une collision entre 2 particules et qui peut s'écrire sous la forme He et Luo (1997a):

$$\Omega(f, f) = \int d^3c \int dS \sigma(S) |c_1 - c| [f(c'_1)f(c') - f(c_1)f(c)] \quad (1.29)$$

Avec  $\sigma(S)$  la section de collision pour deux particules qui entrent en choc transformant leur vitesse de  $\{c_1, c\}$  en  $\{c'_1, c'\}$

Il est ainsi difficile de résoudre l'équation de Boltzmann car le terme de collision est compliqué. Banthagar, Gross et Krook (d'où l'abréviation BGK) ont introduit en 1954 un modèle simple pour l'opérateur de collision.

Il s'agit de l'opérateur de collision le plus couramment utilisés, il met en œuvre une dynamique de relaxation vers un équilibre local avec un paramètre de relaxation unique  $\tau$ .

En supposant que les collisions entre particules ont pour effet de faire tendre les fonctions de distribution vers un état d'équilibre en un temps caractéristique donné, l'opérateur de collision prend la forme suivante :

$$\Omega = \frac{1}{\tau} (f^{eq} - f) \quad (1.30)$$

L'équation de Boltzmann, en absence de forces ( $F = 0$ ), s'écrit donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \nabla f = \frac{1}{\tau} (f^{eq} - f) \quad (1.31)$$

L'équation de Boltzmann discrétisée selon les différentes directions s'écrit :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + e_i \nabla f_i = \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i) \quad (1.32)$$

L'équation discrétisée dans l'espace et le temps :

$$f_i(x + e_i \delta t, t + \delta t) = f_i(x, t) + \frac{1}{\tau} \delta t [f_i^{eq}(x, t) - f_i(x, t)] \quad (1.33)$$

L'équation de Lattice Boltzmann ou de Boltzmann sur réseau ainsi obtenue (1.33) est implémentée en deux étapes essentielles : La collision et la propagation (streaming).

Au cours de l'étape de collision les fonctions d'équilibre sont calculées et les fonctions de distributions sont redistribuées au niveau de chaque nœud :

$$f_i^{ne} = f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t) \quad (1.34)$$

$$f_i^+(x, t) = f_i^{eq}(x, t) + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) f_i^{neq}(x, t)$$

Avec  $f_i^{ne}$  est la fonction de distribution non-équilibre et  $f_i^+$  la fonction de distribution post-collision :

$$f_i(x + e_i \delta t, t + \delta t) = f_i^+(x, t) \quad (1.35)$$

Au niveau de la propagation, les particules sont transportées vers les nœuds voisins pendant une durée  $\delta t$  dans le temps et une distance  $e_i \delta t$  dans l'espace.

Les variables macroscopiques tels que la densité et la quantité de mouvement sont définies à l'aide des fonctions de distribution :

$$\rho = \sum_{i=0}^N f_i \quad (1.36-a)$$

$$\rho u_\alpha = \sum_{i=0}^N e_{i\alpha} f_i \quad (1.36-b)$$

$i=0, \dots, N$  ;  $N$  nombre de direction des vitesses.

#### 1.2.4.2 Relaxation à temps multiples MRT

Le modèle LBM-BGK présenté précédemment, considère que chaque grandeur physique est relaxée à l'équilibre avec un même temps caractéristique  $\tau$ . Ainsi chaque moment de la fonction de distribution, requiert le même temps caractéristique pour revenir à son état d'équilibre.

Cependant, dans la réalité, des phénomènes physiques différents peuvent retrouver l'équilibre en des temps différents.

Ainsi, D. d'Humièrè et al. (1986)-(2002), définissent un nouveau modèle basé sur des temps de relaxation multiples (MRT pour Multiple Relaxation Time). Ce modèle (LBM-MRT) considère que chaque moment (c'est-à-dire les grandeurs physiques) possède un temps caractéristique propre.

Par conséquent, l'opérateur de collision acquiert une forme d'une matrice diagonalisable  $\Omega_{ij}$  qui intervient comme un opérateur linéaire sur la fonction de distribution des particules à l'équilibre selon la forme suivante:

$$f_i(x + e_i \delta t, t + \delta t) - f_i(x, t) = \sum_j \Omega_{ij} (f_j(x, t) - f_j^{eq}(x, t)) \quad (1.37)$$

Étant donné que la matrice  $\Omega$  est diagonalisable, il existe une matrice inversible  $M$ , dont les lignes représentent les vecteurs propres de  $\Omega$  et une matrice diagonale  $S$ , pour lequel la relation suivante est vérifiée :

$$\Omega = -M^{-1}SM \quad (1.38)$$

En notant par  $f'$  la fonction de distribution sortante  $f'_i = f(x + e_i \delta t, t + \delta t)$  D'Humièrè et al., proposent une nouvelle écriture de l'équation de Boltzmann généralisée sous la forme :

$$f'_i = f_i - M^{-1}SM (f_i - f_i^{eq}) \quad (1.39)$$

En considérant par la suite les moments de vecteurs obtenus tels que  $m = Mf$ :

L'équation (1.39) s'écrit alors:

$$f' = f + M^{-1}S (m^{eq} - m) \quad (1.40)$$

avec :

$$m = (m_0, m_1, \dots, m_n)^T \quad (1.41)$$

$$m^{eq} = (m_0^{eq}, m_1^{eq}, \dots, m_n^{eq})^T$$

Avec  $T$  indique la transposé et  $n$  la dimension du réseau.

Les éléments de la matrice diagonale  $S$  sont les différents taux de relaxation tel que :

$$S = \text{diag}(s_0, s_1, \dots, s_n)^T \quad (1.42)$$

Les moments d'équilibres dépendent des valeurs locales des moments conservées (masse, quantité de mouvement et énergie). Les éléments de  $S$  sont donnés par une analyse linéaire.

Pour des vitesses discrètes données sur un réseau symétriques, la matrice de transformation  $M$  peut être facilement construite en appliquant la procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt aux composantes cartésiennes des vitesses discrètes.

Lallmand et al. (2003), explique la construction de la matrice  $M$  pour les modèles D2Q9 et D3Q19.

Pour le cas d'un réseau bidimensionnel à neuf directions de vitesse, comme exemple, la matrice  $M$  s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

Pour la matrice diagonale  $S$  certains de ses éléments sont liés à des quantités macroscopiques tandis que d'autres peuvent être considérés comme «fantômes» qui ne jouent aucun rôle physique, mais peuvent interférer numériquement dans les simulations.

En ajustant les temps de relaxation en rapport avec ces moments « fantômes », on peut améliorer la précision et la stabilité du schéma numérique

Les éléments de la matrice diagonale  $S$  :

$$S = \text{diag}(s_0, s_1, s_2, s_3, s_5, s_6, s_7, s_8)^T$$

avec  $s_0 = 1$  ;  $s_7 = s_8 =$  le temps de relaxation ; les autres éléments sont des éléments fantômes ils n'ont pas d'explication physique pour des écoulements incompressible mais pour des raisons de stabilité ils doivent être choisis librement dans l'intervalle  $0 < S_i < 2$

Les vitesses discrètes du modèle LBM-MRT sont basées sur celles du modèle LBM-BGK.

On considérera par la suite le modèle TRT (Two Relaxation Time) comme exemple des modèles MRT.

### 1.2.4.3 Modèle de relaxation à temps double TRT

En effet, une amélioration significative de l'utilisation de la LBM pour les équations de transport de masse a été mise en œuvre par Ginzburg (2000), qui présente deux temps de relaxation au niveau de l'opérateur de collision et discute une correction du second ordre par l'introduction d'un terme de vitesse quadratique au niveau de la fonction d'équilibre.

En effet, une fois la fonction de distribution des particules atteint le nœud voisin à la fin de chaque itération, une double relaxation à l'état d'équilibre se produit traduite par l'opérateur de collision TRT.

L'Equation de Boltzmann LBE s'écrit alors :

$$f_i(x + e_i \delta t, t + \delta t) = f_i(x, t) + \lambda^+(f_i^+ - eq_i^+) + \lambda^-(f_i^- - eq_i^-) \quad (1.44)$$

avec :

$$f_i^+ = \frac{f_i + \bar{f}_i}{2} \quad (1.45)$$

$$f_i^- = \frac{f_i - \bar{f}_i}{2}$$

$$eq_i^+ = \frac{f_i^{eq} + \bar{f}_i^{eq}}{2} \quad (1.46)$$

$$eq_i^- = \frac{f_i^{eq} - \bar{f}_i^{eq}}{2}$$

$$\lambda^+ = \frac{\delta t}{\tau^+}; \lambda^- = \frac{\delta t}{\tau^-} \quad (1.47)$$

Avec le signe barre indique les positions opposées par rapport aux nœuds considérés.

Les paramètres  $\lambda^+$  et  $\lambda^-$  sont corrélées à l'aide d'un paramètre nommé **Magic** tel que :

$$\Lambda = \Lambda^+ \Lambda^- \quad (1.48)$$

$$\Lambda^+ = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda^+}\right)$$

$$\Lambda^- = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda^-}\right)$$

Dans le cas du modèle BGK on a  $\lambda^+ = \lambda^- = -\frac{\delta t}{\tau}$  le **Magic** BGK vaut alors  $\Lambda = (\Lambda^-)^2$

Certaines valeurs caractéristiques du **Magic** ont des propriétés intéressantes tel que :

$\Lambda = \frac{1}{4}$  pour une bonne stabilité.

$\Lambda = \frac{1}{12}$  et  $\Lambda = \frac{1}{8}$  généralement utilisées dans les problèmes de transfert.

Ce qui nous amène généralement à fixer le paramètre  $\lambda^-$  et à calculer par la suite  $\lambda^+$  à travers la relation du **Magic**  $\Lambda$ .

### 1.2.5 Modèles de Lattice (réseaux)

Pour la LBM, le domaine doit être divisé en Lattice où plusieurs particules, en d'autres termes des fonctions de distribution, résident. Parmi ces particules, il y en a ceux qui se propagent selon des directions spécifiques vers les nœuds voisins. Le nombre de directions et de connexions dépendent de l'arrangement du Lattice. La terminologie utilisée en LBM pour se référer aux dimensions du problème et aux nombres de vitesses utilisées est **DnQm**, où **n** représente la dimension du problème et **m** représente le nombre des directions de vitesse. Quelques exemples de réseaux 2D et 3D généralement utilisées pour la simulation des écoulements isothermes incompressibles sont cités par la suite.

Des coefficients de pondérations, notés  $\omega_i$  sont introduits afin de tenir compte du fait que tous les vecteurs de réseau n'ont pas la même longueur. Chaque modèle de réseau possède trois types de coefficients de pondération : Ils sont choisis de manière à assurer la conservation de la masse et la quantité de mouvement ainsi que l'isotropie du tenseur Lattice (le tenseur Lattice est un invariant qui respecte les transformations orthogonales arbitraires (Wolf-Gladrow, 2000)).

Un tenseur Lattice de rang n est défini par:

$$L = \sum_i e_{i\alpha_1} e_{i\alpha_2} \dots e_{i\alpha_n} \quad (1.49)$$

Jeffreys (1965) a prouvé qu'un tenseur isotropique de rang 2 doit être proportionnel à  $\delta\alpha\beta$  et un tenseur isotropique de rang 3 doit être proportionnel à  $\delta\alpha\beta\gamma$  ( $\delta$  étant le symbole de Kronecker).

Si le tenseur Lattice n'est pas isotropique alors les facteurs de pondération doivent être choisis de telle sorte à le rendre isotropique.

On considère dans ce qui suit à titre illustratif l'exemple de réseau à 9 directions de vitesse. (Le centre du réseau étant considéré comme une direction). Dans ce cas le modèle de vitesse peut s'écrire de la façon suivante:

$$e_i \begin{cases} (0,0) & i = 0 \\ (\cos[(i-1)\pi/2], \sin[(i-1)\pi/2])c & i = 1,2,3,4 \\ \sqrt{2}(\cos[(i-5)\pi/2 + \pi/4], \sin[(i-5)\pi/2 + \pi/4])c & i = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (1.50)$$

où  $c = \delta x / \delta t$  unité de vitesse et  $\delta x$  et  $\delta t$  respectivement la constante Lattice et le pas de temps.

Du fait de la symétrie des facteurs de pondération  $\omega_i$  des directions à vitesse identiques sont égaux d'où pour le modèle à 9 vitesses il s'agit de déterminer uniquement trois facteurs de pondération  $w_0$ ,  $w_1$  et  $w_2$ .

$$\omega_i = \begin{cases} w_0 & i = 0 \\ w_1 & i = 1,2,3,4 \\ w_2 & i = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (1.51)$$

Dans le cas du modèle Lattice à 9 vitesses le tenseur Lattice de rang 4 est non isotropique, pour cette raison, Wolf-Gladrow (2000) ont considéré une forme générale de ce tenseur tel que  $w_2 = (1/4)w_1$ .

Outre que l'isotropie, les facteurs de pondération doivent assurer la conservation de la masse et de la quantité de mouvement d'où :

$$\rho = \sum_{i=0}^n f_i^{eq} ; \rho u_\alpha = \sum_{i=0}^n e_{i\alpha} f_i^{eq} \quad (1.52)$$

En remplaçant ainsi la fonction d'équilibre par son expression (1.27) on obtient :

$$\sum_{i=0}^n \omega_i = 1 \text{ et } \sum_{i=0}^n \omega_i e_{i\alpha} e_{i\alpha} = c_s^2 \delta_{\alpha\alpha} \quad (1.53)$$

Ainsi,

$$w_0 + 4w_1 + 4w_2 = 1 \text{ et } 2w_1 + 4w_2 = c_s^2/c^2 \quad (1.54)$$

Avec  $c_s^2 = c^2/3$  (Wolf-Gladrow, 2000) les facteurs de pondérations sont alors obtenus tel que :  $w_0 = \frac{4}{9}$ ;  $w_1 = \frac{1}{9}$ ;  $w_2 = \frac{1}{36}$

Les différentes caractéristiques des Lattices 2D et 3D les plus utilisés sont explicités dans ce qui suit :

### 1.2.5.1 Modèles bidimensionnels

#### ✓ Modèle D2Q5

Pour ce type de modèle on a :

$$\begin{aligned} c_s^2 &= 1/3 \\ w_0 &= 1/3 \quad w_{\text{prin}} = 1/6 \\ \vec{c}_0 &= (0,0) \\ \vec{c}_1 &= (1,0) \quad \vec{c}_2 = (-1,0) \quad \vec{c}_3 = (0,1) \quad \vec{c}_4 = (0,-1) \end{aligned}$$

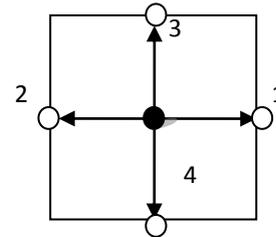


Figure 1.1 : Modèle bidimensionnel D2Q5

Ce réseau se distingue par l'absence de direction de vitesse selon les angles. Les coefficients de pondérations obtenus au niveau des différents nœuds sont identiques tel que  $w_i = \frac{1}{6}$

#### ✓ Modèle D2Q9

Généralement employé dans la littérature

$$\begin{aligned} c_s^2 &= 1/3 \\ w_0 &= 4/9 \quad w_s = 1/9 \quad w_i = 1/36 \\ \vec{c}_0 &= (0,0) \\ \vec{c}_1 &= (1,0) \quad \vec{c}_2 = (0,1) \quad \vec{c}_3 = (-1,0) \quad \vec{c}_4 = (0,-1) \\ \vec{c}_5 &= (1,1) \quad \vec{c}_6 = (-1,1) \quad \vec{c}_7 = (-1,-1) \quad \vec{c}_8 = (1,-1) \end{aligned}$$

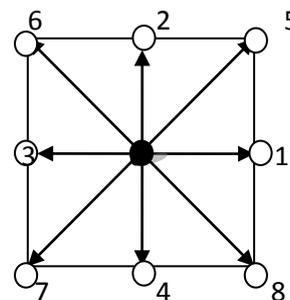


Figure 1.2 : Modèle bidimensionnel D2Q9

### 1.2.5.2 Modèles tridimensionnels

#### ✓ Modèle D3Q15

$$c_s^2 = 1/3$$

$$w_0 = 2/3 \quad w_{\text{prin}} = 1/9 \quad w_{\text{diag}} = 1/72$$

$$\vec{c}_0 = (0,0)$$

$$\vec{c}_1 = (1,0,0) \quad \vec{c}_2 = (-1,0,0) \quad \vec{c}_3 = (0,1,0)$$

$$\vec{c}_4 = (0,-1,0) \quad \vec{c}_5 = (0,0,1) \quad \vec{c}_6 = (0,0,-1)$$

$$\vec{c}_7 = (1,1,1) \quad \vec{c}_8 = (-1,-1,-1) \quad \vec{c}_9 = (1,1,-1)$$

$$\vec{c}_{10} = (-1,-1,1) \quad \vec{c}_{11} = (1,-1,1) \quad \vec{c}_{12} = (-1,1,-1)$$

$$\vec{c}_{13} = (1,-1,-1) \quad \vec{c}_{14} = (-1,1,1)$$

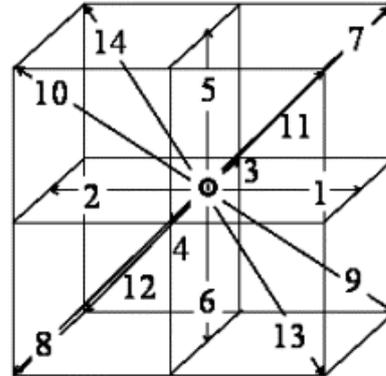


Figure 1.3 : Modèle tridimensionnel D3Q15

#### ✓ Modèle D3Q19

Le plus fréquent dans la littérature

$$c_s^2 = 1/3$$

$$w_0 = 1/3 \quad w_{\text{prin}} = 1/18 \quad w_{\text{diag}} = 1/36$$

$$\vec{c}_0 = (0,0)$$

$$\vec{c}_1 = (1,0,0) \quad \vec{c}_2 = (-1,0,0) \quad \vec{c}_3 = (0,1,0)$$

$$\vec{c}_4 = (0,-1,0) \quad \vec{c}_5 = (0,0,1) \quad \vec{c}_6 = (0,0,-1)$$

$$\vec{c}_7 = (1,1,0) \quad \vec{c}_8 = (-1,1,0) \quad \vec{c}_9 = (1,-1,0)$$

$$\vec{c}_{10} = (-1,-1,0) \quad \vec{c}_{11} = (1,0,1) \quad \vec{c}_{12} = (-1,0,1)$$

$$\vec{c}_{13} = (1,0,-1) \quad \vec{c}_{14} = (-1,0,-1) \quad \vec{c}_{15} = (0,1,1)$$

$$\vec{c}_{16} = (0,-1,1) \quad \vec{c}_{17} = (0,1,-1) \quad \vec{c}_{18} = (0,-1,-1)$$

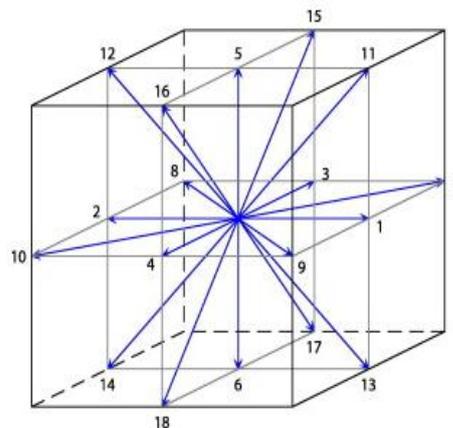


Figure 1.4 : Modèle tridimensionnel D3Q19

### 1.3 Équation macroscopiques à partir de l'équation de Boltzmann

Un développement de Chapman-Enskog partant de l'équation de Boltzmann sur réseau pour aboutir soit à l'équation de diffusion convection (**Annexe A**) ou aux équations de Navier stokes (**Annexe B**), nous fournit l'expression de la diffusivité thermique, de la viscosité cinématique du fluide et de la pression en fonction des paramètres du calcul  $c, \tau, \tau_d$  et  $\Delta t$ :

$$D = \frac{c^2}{3} \left( \tau_d - \frac{\Delta t}{2} \right) \quad (1.55)$$

$$\nu = \frac{c^2}{3} \left( \tau - \frac{\Delta t}{2} \right) \quad (1.56)$$

$$P = \rho \frac{c^2}{3} \quad (1.57)$$

Sachant que :  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = c\Delta t$

Et en posant :

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\Delta t} \quad (1.58)$$

On obtient :

$$D = \frac{\Delta x^2}{3\Delta t} \left( \bar{\tau}_d - \frac{1}{2} \right) \quad (1.59)$$

$$\nu = \frac{\Delta x^2}{3\Delta t} \left( \bar{\tau} - \frac{1}{2} \right) \quad (1.60)$$

#### Equation de Lattice Boltzmann pour les transferts d'un scalaire

Pour le transfert d'un scalaire  $\phi$ , nous utilisons une équation de Lattice Boltzmann analogue à celle utilisée pour l'écoulement :

$$g_i(r + c_i\Delta t, t + \Delta t) = g_i(r, t) + \frac{\Delta t}{\tau_d} [g_i^{eq}(r, t) - g_i(r, t)] + w_i\Delta t Q \quad (1.61)$$

où  $Q$  est un terme source.

#### 1.3.1 Conditions initiales et aux limites pour les écoulements

La détermination de la densité et de la vitesse nécessite la connaissance des conditions initiales et aux limites. Une infinité d'états microscopiques peuvent caractériser un même état macroscopique. Le seul état qui peut être défini pour un champ de vitesse donné et un champ de pression donné sans autres informations est la distribution à l'équilibre. Cette distribution

d'équilibre peut correspondre au cas d'un fluide stagnant ou bien possédant une vitesse constante.

### 1.3.1.1 Conditions initiales

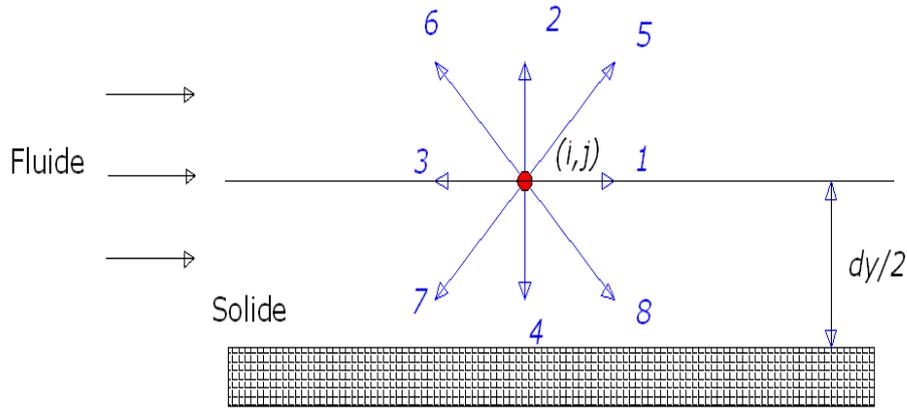
Dans la méthode de Boltzmann sur réseau, l'approche générale utilisée pour déterminer la valeur initiale, consiste à égaliser la fonction de distribution initiale  $f_i^0(\vec{x})$  avec la fonction d'équilibre :  $f_i^0(\vec{x}) = f_i^{eq}(\rho_0(\vec{x}), \vec{u}_0(\vec{x}))$ .

### 1.3.1.2 Conditions aux limites pour les écoulements

L'un des problèmes cruciaux lors de la simulation des écoulements par la méthode LBM est la formulation des conditions aux limites. En effet, pour les équations de Navier Stokes il est simple d'y adapter les conditions aux limites ce qui n'est pas le cas pour la méthode LBM où les fonctions de distribution ne sont pas connues. Pour cela, il est indispensable de déterminer les fonctions de distribution appropriées à ces conditions limites. Dans la littérature, plusieurs approches ont été proposées, on va donc présenter dans les paragraphes suivants les méthodes les plus simples pour la détermination des conditions aux limites dans le cas du modèle D2Q9.

#### a. Condition de rebond-arrière (« *Bounce-Back* ») :

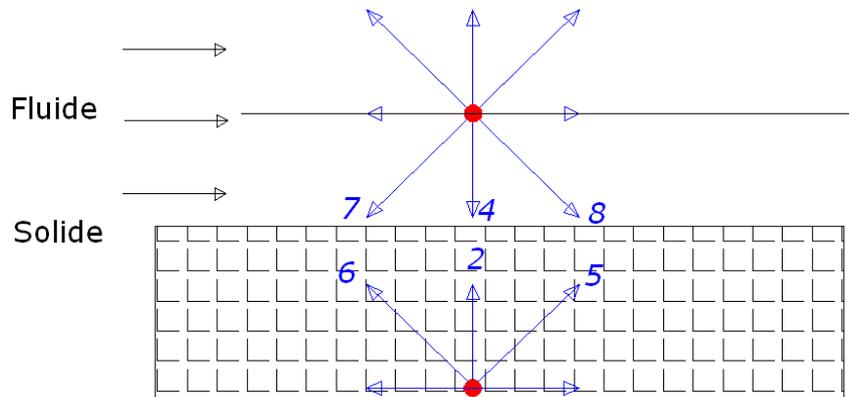
La condition de rebond-arrière généralement connue sous le nom de « *Bounce-Back* » est utilisée pour représenter la condition d'adhérence à une paroi fixe. En effet, la méthode Bounce Back est très simple et suppose qu'une particule qui entre en collision avec une paroi solide va rebondir vers le fluide. Dans la littérature Ziegler (1993) Wan et al.(1997), quelques versions des schémas Bounce Back ont été suggérées et l'un parmi eux suggère que le solide se trouve à une distance  $\frac{\Delta y}{2}$  de l'axe de la Lattice comme expliqué dans la figure suivante :



**Figure 1.5** : Schéma du Bounce Back « rebond arrière » (I)

Les fonctions de distributions  $f_4$ ,  $f_7$  et  $f_8$  sont connues grâce au processus de propagation, on suppose que les particules correspondantes à ces fonctions de distribution heurtent le solide et rebondissent dans la même direction mais dans un sens contraire, par conséquent,  $f_5 = f_7$ ,  $f_2 = f_4$  et  $f_6 = f_8$ .

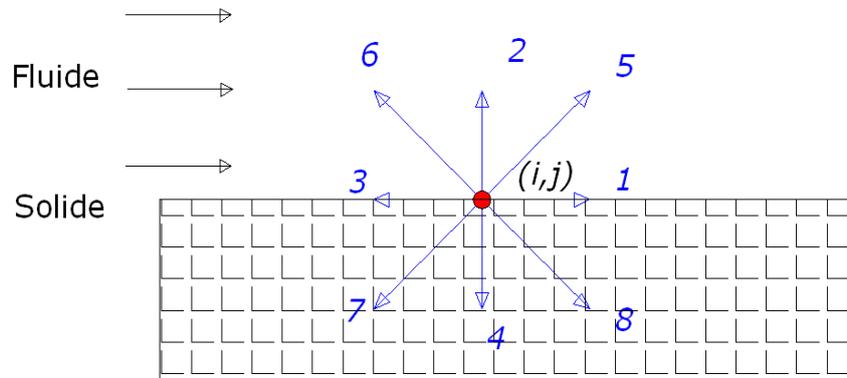
Un autre arrangement possible est de supposer que le solide se trouve à mi-distance entre deux Lattices et que la deuxième Lattice se trouve dans le solide comme indiquée sur la figure ci-dessous.



**Figure 1.6** : Schéma du Bounce Back « rebond arrière » (II)

Il est à noter que le rebondissement des particules se fait dans le solide et par conséquent  $f_2 = f_4$ ,  $f_5 = f_7$  et  $f_6 = f_8$ . La particularité de ce second arrangement est la possibilité de rebondissement des particules à partir des lattices de différents emplacements.

Il existe un troisième arrangement où les lattices sont localisées directement sur le solide comme présenté sur la figure ci-dessous :



**Figure 1.7** : Schéma du Bounce Back « rebond arrière » (III)

Et par suite,  $f_5 = f_7$ ,  $f_2 = f_4$  et  $f_6 = f_8$  où  $f_4$ ,  $f_7$  et  $f_8$  sont connues grâce au processus de propagation. Ce dernier schéma est relativement plus simple que les autres schémas.

**b. Condition à la limite avec vitesse non nulle et connue :**

Il est courant dans la pratique que la vitesse aux limites soit non nulle et connue, à l'instar de la vitesse à l'entrée d'un tube. Cependant, pour la LBM on doit spécifier les fonctions de distribution aux limites. Vers l'extérieur du fluide les fonctions de distribution ( $f_4$ ,  $f_7$  et  $f_8$ ) sont connues grâce au processus de propagation et les autres fonctions ( $f_2$ ,  $f_5$  et  $f_6$ ) doivent être calculées.

Zu et He (1997) ont proposé une méthode permettant de calculer ces trois fonctions inconnues en se basant sur les équations ((1.36-a et -b)) et en supposant que les conditions d'équilibre sont vérifiées suivant la normale à la limite.

La forme explicite de l'équation (1.36-a) est la suivante :

$$\rho = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \quad (1.62)$$

Tandis que la forme explicite de l'équation ((1.36-b)) dans la direction des x est la suivante :

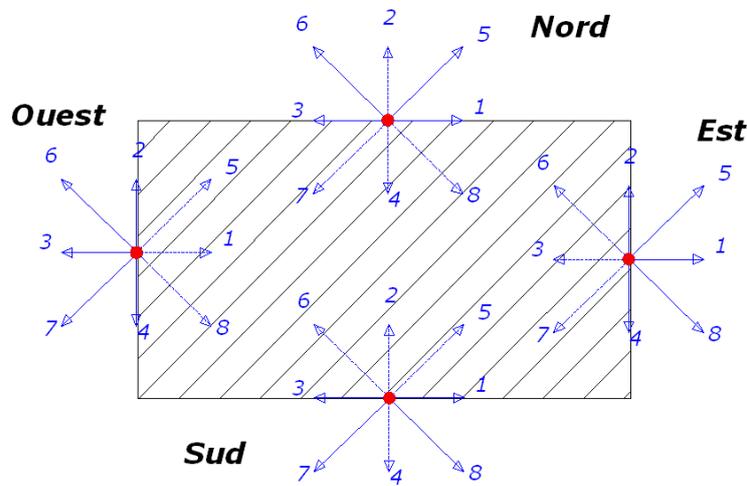
$$\rho u_1 = f_1 + f_5 + f_8 - f_6 - f_3 - f_7 \quad (1.63)$$

Et dans la direction des y :

$$\rho u_2 = f_5 + f_2 + f_6 - f_7 - f_4 - f_8 \quad (1.64)$$

Avec ces trois équations, on a besoin d'une autre équation ou une condition supplémentaire afin de fermer le problème vu qu'on a quatre inconnues à la limite ( $\rho$  et les trois fonctions de distribution).

La condition supplémentaire est obtenue en supposant que la condition d'équilibre est vérifiée suivant la normale à la limite. Pour distinguer les différents cas, on considère un domaine rectangulaire où la vitesse est connue aux limites.



**Figure 1.8** : Fonctions de distribution aux limites

**Limite ouest :**

En considérant la limite Ouest comme exemple, les fonctions de distribution inconnues sont dans ce cas  $f_1$ ,  $f_5$  et  $f_8$ . Dans l'objectif de déterminer ces inconnues, on considère au niveau de cette limite les équations de la densité (1.62) et des composantes de vitesse (1.63) et (1.64). Une troisième condition doit être ajoutée afin d'obtenir un système d'équation aux nombres d'inconnues. Pour ceci, on utilise la condition d'équilibre dans la direction normale de (Zou et He (1997)):

$$f_1 - f_1^{eq} = f_3 - f_3^{eq} \quad (1.65)$$

avec :

$$f_1^{eq} = \frac{1}{9} \rho \left[ 1 + 3u_1 + \frac{9}{2}u_1^2 - \frac{3}{2}(u_1^2 + u_2^2) \right] \quad (1.66)$$

$$f_3^{eq} = \frac{1}{9} \rho \left[ 1 - 3u_1 + \frac{9}{2} u_1^2 - \frac{3}{2} (u_1^2 + u_2^2) \right] \quad (1.67)$$

L'équation suivante est obtenue en combinant les équations ((1.66), (1.67)) afin d'obtenir l'expression de  $f_1$  et en résolvant toutes ces équations pour les quatre inconnues  $\rho, f_1, f_5$  et  $f_8$  ; les équations suivantes peuvent être obtenues :

$$\rho = \frac{1}{1-u_w} [f_0 + f_2 + f_4 + 2 (f_3 + f_6 + f_7)] \quad (1.68)$$

$$f_1 = f_3 + \frac{2}{3} \rho u_1 \quad (1.69)$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2} (f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho u_1 + \frac{1}{2} \rho u_2 \quad (1.70)$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2} (f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho u_1 - \frac{1}{2} \rho u_2 \quad (1.71)$$

On procède donc de la même manière pour déterminer les inconnues des autres limites. En suivant la même démarche que précédemment, on obtient, pour les autres limites.

**Limite est :**

$$\rho = \frac{1}{1+u_1} [f_0 + f_2 + f_4 + 2 (f_1 + f_5 + f_8)] \quad (1.72)$$

$$f_3 = f_1 - \frac{2}{3} \rho u_1 \quad (1.73)$$

$$f_7 = f_5 + \frac{1}{2} (f_2 - f_4) - \frac{1}{6} \rho u_1 + \frac{1}{2} \rho u_2 \quad (1.74)$$

$$f_6 = f_8 - \frac{1}{2} (f_2 - f_4) - \frac{1}{6} \rho u_1 - \frac{1}{2} \rho u_2 \quad (1.75)$$

**Limite nord :**

$$\rho = \frac{1}{1+u_2} [f_0 + f_1 + f_3 + 2 (f_2 + f_6 + f_5)] \quad (1.76)$$

$$f_4 = f_2 - \frac{2}{3} \rho u_2 \quad (1.78)$$

$$f_7 = f_5 + \frac{1}{2} (f_1 - f_3) - \frac{1}{6} \rho u_2 - \frac{1}{2} \rho u_1 \quad (1.79)$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2} (f_3 - f_1) - \frac{1}{6} \rho u_2 + \frac{1}{2} \rho u_1 \quad (1.80)$$

**Limite sud :**

$$\rho = \frac{1}{1-u_2} [f_0 + f_1 + f_3 + 2(f_4 + f_7 + f_8)] \quad (1.81)$$

$$f_2 = f_4 + \frac{2}{3} \rho u_2 \quad (1.82)$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2} (f_1 - f_3) + \frac{1}{6} \rho u_2 + \frac{1}{2} \rho u_1 \quad (1.83)$$

$$f_6 = f_8 + \frac{1}{2} (f_1 - f_3) + \frac{1}{6} \rho u_2 - \frac{1}{2} \rho u_1 \quad (1.84)$$

**Remarque :**

Les variables macroscopiques  $\rho$  et  $u$  étant connues sur la frontière, la méthode la plus simple pour déterminer les fonctions de distribution inconnues est de supposer qu'elles sont des distributions d'équilibre sur cette frontière:

$$f_i = f_i^{eq} \quad (1.85)$$

**c. Condition à la limite ouverte**

Pour certains problèmes, la vitesse à la sortie n'est pas connue, on utilise donc la technique d'extrapolation pour les fonctions de distribution inconnues. A titre d'exemple, si la limite Est de la figure 7 représente la condition de sortie, la fonction de distribution  $f_3$  vérifie la relation suivante :

$$f_{3,n-1} = \frac{f_{3,n} + f_{3,n-2}}{2} \quad (1.86)$$

Par conséquent,

$$f_{3,n} = 2 \cdot f_{3,n-1} - f_{3,n-2} \quad (1.87)$$

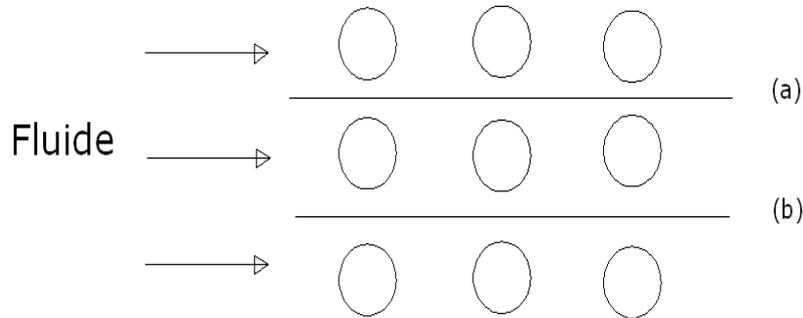
Si on procède de la même façon pour les fonctions de distribution  $f_6$  et  $f_7$ , on aura :

$$f_{6,n} = 2 \cdot f_{6,n-1} - f_{6,n-2} \quad (1.88)$$

$$f_{7,n} = 2 \cdot f_{7,n-1} - f_{7,n-2} \quad (1.89)$$

#### d. Condition à la limite périodique

On considère par exemple un écoulement autour d'un arrangement aligné de tube comme présenté dans la figure suivante.



**Figure 1.9** : Conditions à la limite périodique

Compte tenu de la périodicité, il est suffisant d'étudier l'écoulement entre les deux lignes (a) et (b) et d'utiliser les conditions aux limites périodiques. Les fonctions de distribution qui quittent la ligne (a) sont les mêmes qui entrent par la ligne (b) et vice versa.

Les fonctions de distribution  $f_4, f_7$  et  $f_8$  sont inconnues sur la ligne (a) et  $f_2, f_5$  et  $f_6$  sont inconnues sur la ligne (b). La condition à la limite périodique sera donc :

✓ *Le long de la ligne (a) :*

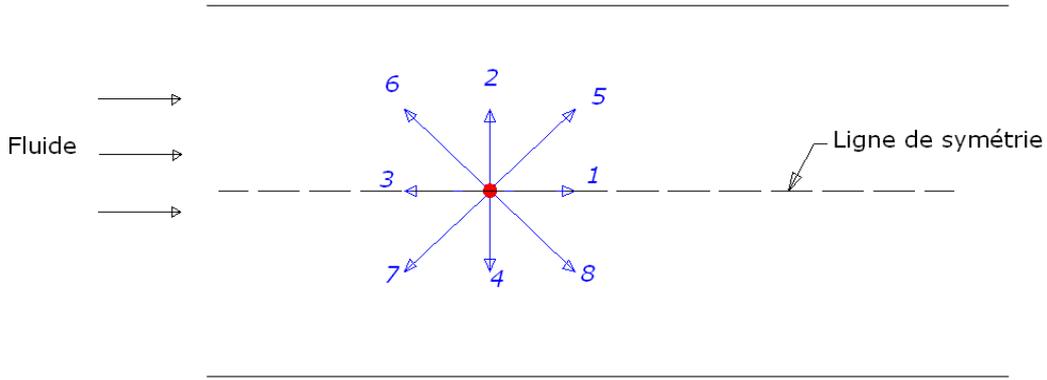
$$f_{4,a} = f_{4,b}, f_{7,a} = f_{7,b} \text{ et } f_{8,a} = f_{8,b}$$

✓ *Le long de la ligne (b) :*

$$f_{2,b} = f_{2,a}, f_{5,b} = f_{5,a} \text{ et } f_{6,b} = f_{6,a}$$

#### e. Condition de symétrie

Plusieurs problèmes présentent une symétrie suivant une ligne ou un plan, il est alors intéressant de trouver des solutions seulement pour la moitié du domaine ce qui permet de réduire le temps de calcul et nécessite moins de mémoire.



**Figure 1.10** : Condition de symétrie

Par exemple pour un tube, l'écoulement au-dessus de la ligne de symétrie est identique à celui au-dessous de cette dernière et par conséquent l'intégration doit être faite pour une seule partie du domaine et la condition de symétrie doit être appliquée le long de la ligne de symétrie. Cette condition s'écrit :

$$f_5 = f_7, f_2 = f_4 \text{ et } f_6 = f_8 \quad (1.90)$$

### 1.3.1.3 Conditions aux limite de transfert

La plupart des études la température ou le flux thermique sont généralement considérés constant. Dans ce cas les conditions utilisés dans la LBM s'écrivent qui suit :

#### a. Conditions aux limites avec concentration imposées (condition de Dirichlet)

En se basant sur le principe de conservation de flux et en choisissant par exemple la limite  $x=0$  (face ouest de concentration  $C_w$ ) d'une cavité rectangulaire de largeur  $X$  et de longueur  $Y$  (figure 1.11) en remplaçant les fonctions d'équilibre par leur expression on obtient:

$$\begin{aligned} g_5^{eq} - g_5 + g_7^{eq} - g_7 &= w_5 C_w + w_7 C_w - g_5 - g_7 = 0 \\ g_1^{eq} - g_1 + g_3^{eq} - g_3 &= w_1 C_w + w_3 C_w - g_1 - g_3 = 0 \\ g_8^{eq} - g_8 + g_6^{eq} - g_6 &= w_8 C_w + w_6 C_w - g_8 - g_6 = 0 \end{aligned} \quad (1.91)$$

Les fonctions  $g_3$ ,  $g_6$  et  $g_7$  sont obtenues à partir du processus de propagation, donc on a :

$$\begin{aligned} g_5 &= w_5 C_w + w_7 C_w - g_7 \\ g_1 &= w_1 C_w + w_3 C_w - g_3 \end{aligned} \quad (1.92)$$

$$g_8 = w_8 C_w + w_6 C_w - g_6$$

Pour la face est ( $x=X$ ), on a :

$$g_3 = w_3 C_E + w_1 C_E - g_1$$

$$g_6 = w_6 C_E + w_8 C_E - g_8 \quad (1.93)$$

$$g_7 = w_7 C_E + w_5 C_E - g_5$$

Pour la face nord ( $y=Y$ ), on a :

$$g_4 = w_4 C_N + w_2 C_N - g_2$$

$$g_7 = w_7 C_N + w_5 C_N - g_5 \quad (1.94)$$

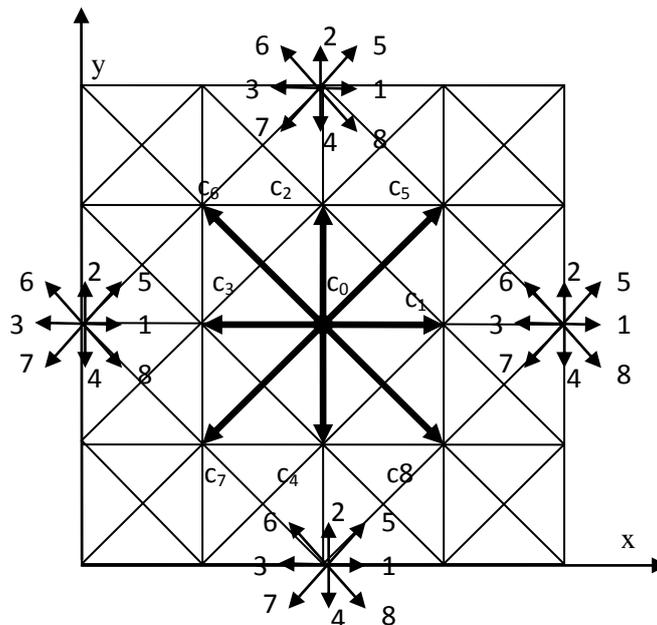
$$g_8 = w_8 C_N + w_6 C_N - g_6$$

Pour la face sud ( $y=0$ ), on a :

$$g_2 = w_2 C_S + w_4 C_S - g_4$$

$$g_5 = w_5 C_S + w_7 C_S - g_7 \quad (1.95)$$

$$g_6 = w_6 C_S + w_8 C_S - g_8$$



**Figure 1.11** : Fonctions de distribution au niveau des parois fixes

**b. Conditions zéro gradient :**

En considérant, par exemple, une limite perpendiculaire à (Ox) , on aura:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (1.96)$$

L'expression du gradient nul  $\frac{\partial C}{\partial x} = 0$  peut être approximée par la relation à l'ordre 1:

$$\frac{C(i+1,j)-C(i,j)}{\Delta x} = 0 \quad (1.97)$$

Donc

$$C(i+1,j) = C(i,j) \quad (1.98)$$

et

$$\sum_{k=1}^8 g_k(i,j) = \sum_{k=1}^8 g_k(i+1,j) \quad (1.99)$$

On peut supposer que :

$$g_k(i,j) = g_k(i+1,j); k = 1, \dots, 8 \quad (1.100)$$

**c. Conditions aux limites de flux constant :**

En supposant un flux constant comme exemple à la limite Ouest tel que :

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -K \quad (1.101)$$

Une approximation de type différence finie donne :

$$\frac{C(i+1,j)-C(i,j)}{\Delta x} = -K \quad (1.102)$$

$$C(i,j) = C(i+1,j) + K\Delta x \quad (1.103)$$

La condition aux limites correspondante sur la distribution s'écrit, alors :

$$g_k(i,j) = g_k(i+1,j) + K\Delta x \quad k = 1, \dots, 8 \quad (1.104)$$

### 1.3.2 Correspondance entre unités LBM et unités physiques

Souvent, afin de ne pas dépendre des paramètres du réseau, on considère un réseau régulier avec les pas d'espace  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$  et le pas de temps (Lattice  $\Delta t = 1$ ). Ceci implique alors une vitesse égale à l'unité. Cependant, il faut différencier entre les unités physiques (PU: PhysicsUnits) et les unités numériques propres au réseau (LU: Lattice Units). En considérant que la longueur du domaine est égale à H, contenant N noeuds, le pas spatial entre deux noeuds du réseau est défini par la relation:

$$\Delta x = \frac{H}{N} \quad (1.105)$$

Les nombres sans dimension calculés à l'aide des unités LBM et avec les unités physiques doivent être les mêmes pour traiter le même problème. Par exemple, le nombre de Reynolds physique est donné par :

$$Re = \frac{HU}{\nu} \quad (1.106)$$

Où H et U sont respectivement une longueur et une vitesse caractéristique de l'écoulement. Le nombre de «lattice» dans la direction de la longueur caractéristique du problème est  $N = \frac{H}{\Delta x}$ . Le nombre de Reynolds en LBM s'écrit:

$$Re = \frac{NU_{lu}}{\nu_{lu}} \quad (1.107)$$

Le nombre de Reynolds obtenu avec les unités LBM doit être le même que celui obtenu avec les unités physiques. Par conséquent, si le nombre de «lattices» dans la direction H de l'écoulement est N et la viscosité cinématique est  $\nu$ , la vitesse doit être donc calculée de façon à obtenir le même nombre de Reynolds.

## 1.4 Avantages et inconvénients de la LBM

La nature cinétique de l'équation de Boltzmann introduit des caractéristiques uniques qui la distinguent de l'équation Navier-Stokes (Aidun et Clausen (2010) )

Parmi les avantages de la méthode de Boltzmann, on cite :

- L'équation de Boltzmann est une équation aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre alors que les équations de NS sont des EDP de second ordre.
- au niveau de l'équation de Boltzmann le terme de convection est linéaire alors qu'il est non linéaire au niveau des équations de Navier-Stokes.

- la détermination du champ de pression, à partir des équations de Naviers Stokes, est difficile dans le cas d'un écoulement incompressible puisque ça nécessite la résolution de l'équation elliptique de Poisson qui nécessite des informations non-locales de l'écoulement. Dans le cas de la LBM la pression est déterminée à partir d'une équation d'état utilisant des informations locales de l'écoulement.
- les phénomènes liés à l'interaction moléculaire sont intégrés facilement dans le modèle LBE en raison de la nature cinétique de l'équation de Boltzmann.
- la simplicité de l'algorithme LB ainsi que sa localité rend la méthode LB bien adaptée aux calculs parallèles (Pohl et al. (2003) ;Velivelli et Bryden (2004) ; Clausen et al (2010)). D'autre part, malgré tous ces avantages la méthode LB possède l'inconvénient dû à la contrainte d'utilisation d'un maillage carré en 2D et cubique en 3D. Ceci exige, dans le cas où une haute résolution est nécessaire, un très grand nombre de nœuds et donc un temps de calcul et une capacité mémoire importants.

## 1.5 Conclusion

Ce premier chapitre a été consacré à la présentation de la méthode de simulation numérique Lattice Boltzmann ainsi que les différentes équations fondamentales qui la compose.

Cette méthode basée sur une modélisation mésoscopique de l'écoulement, échelle intermédiaire entre la microscopie et la macroscopie, a connu un grand essor pendant la dernière décennie. Son principe simple et son algorithme élémentaire la rendent de plus en plus appliquée dans des calculs CFD dans divers problèmes physiques.

Cette méthode se démarque des schémas traditionnels en résolvant numériquement une équation basée sur la physique statistique. Ainsi, en guise d'introduction, nous avons présenté les grandes lignes historiques, nécessaires pour comprendre les différents aspects théoriques de cette méthode. Le principe de la LBM consiste à la résolution de l'équation de Boltzmann liant ainsi les variables obtenus aux variables macroscopiques du problème grâce au développement de Chapman-Enskog. Pour ceci, nous avons présenté les différentes approches permettant de remonter aux équations macroscopiques gouvernant l'écoulement. Les approximations relatives au choix d'un opérateur de collision adéquat adaptés aux problèmes et permettant de surmonter sa sans introduire des erreurs importantes dans la solution a été discuté. Le traitement des conditions aux limites des problèmes physiques par la méthode LBM a été abordé, dans ce chapitre, mettant en évidence une diversité de de

méthodes adaptées selon le problème considéré. Une dernière partie du présent chapitre a été consacré à la conversion des unités des variables macroscopiques calculés, solution de la résolution, en unités physiques.

Nous utiliserons, au cours de ce travail de thèse la méthode LBM comme outil de simulation de la dynamique et des transferts dans des écoulements tourbillonnaires. Le chapitre suivant sera alors consacré à une revue bibliographique de ce type d'écoulements ainsi que les différentes instabilités qui y sont générés.



## **-Chapitre II-**

Etat de l'art sur des exemples d'écoulements  
tourbillonnaires : Écoulement autour d'un obstacle et  
écoulement de Couette-Taylor



## **2.1 Écoulement autour d'un obstacle en milieu confiné**

### **2.1.1 Introduction : Intérêt pratiques**

Cette partie du travail porte sur l'étude des instabilités de sillage générées par des corps solides fixes immergés dans un fluide newtonien incompressible, homogène et monophasique. Le paramètre adimensionnel gouvernant la physique du problème est, dans ce cas, le nombre de Reynolds  $Re$  qui est basé sur la vitesse incidente, la taille caractéristique de l'objet et la viscosité cinématique du fluide. La gamme balayée des nombres de Reynolds permet l'obtention des écoulements de Stokes jusqu'à la transition vers les régimes chaotiques.

L'étude des sillages des corps immergés dans un écoulement reste encore d'actualité malgré le nombre important des travaux effectués sur ce sujet. Ceci s'explique par la variété de ses applications et son intérêt pratique majeur dans l'ingénierie industrielle, tel que l'aérodynamique et le génie civil (nombre de Reynolds élevé).

Quelle que soit l'utilisation du corps, la maîtrise du comportement dynamique du sillage derrière celui-ci reste primordiale, puisqu'elle permet de mieux optimiser sa conception suivant les objectifs souhaités.

Parmi les applications directes de l'étude du sillage généré suite à l'interaction entre un fluide et un obstacle, l'aéronautique et plus précisément l'aviation. En effet, le sillage derrière un avion a une particularité d'être composé de tourbillons intenses, inhérents à la portance de l'avion (Figure 2.1). Ces vortex en interaction entre elles et avec l'écoulement des jets des turboréacteurs forment des tourbillons marginaux en aval de l'avion qui peuvent persister quelques minutes dans l'air. Cette signature tourbillonnaire, pourrait présenter un danger majeur pour les avions suiveurs qui subiraient son influence. D'où les distances minimales de sécurité qui sont à respecter impérativement entre deux décollages ou deux atterrissages.

Plusieurs études ont été menées afin de caractériser ce type de sillage et comprendre le comportement des tourbillons. Des solutions sont aujourd'hui envisagées afin minimiser les dangers de ces sillages, mais restent encore incomplètes vu l'étendu du sujet (Spalart, 1998).

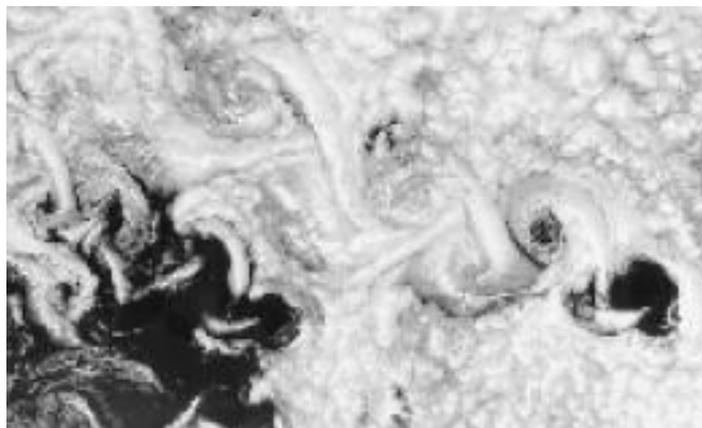


**Figure 2.1** : Photographie d'un sillage d'un avion

D'autres applications directes issues des études sur les sillages derrière des obstacles sont rencontrées dans le domaine du génie civil. En effet, soumises à des vents latéraux, les instabilités produites par les structures érigées (ponts ou grattes ciels, etc.) entraînent des vibrations de celles-ci, qui doivent être maîtrisées.

Dans un autre registre, les îles ou parfois des montagnes peuvent être considérées comme un obstacle aux courants atmosphériques. La figure (2.2) illustre un témoignage intéressant de structures tourbillonnaires contrarotatives alternées, caractéristiques de l'allée de Bénard-von Kármán dans le sillage d'une île de l'archipel des Canaries (photographie prise par la NASA, Goddard Space Flight Center et ORBIMAGE, réalisée lors du SeaWiFS).

Ces allées sont rencontrées dans plusieurs domaines, parfois elles sont considérées comme indésirables et/ou nuisibles (généralement en génie civil ou en aérodynamique) affectant ainsi la portance (force perpendiculaire à la direction du mouvement et orientée vers le haut du corps) et donc la stabilité de l'objet.



**Figure 2.2** : Instabilité de Von-Karman dans le sillage d'une île (Goddard Space Flight Center).

Cependant, ce type d'instabilité peut parfois être bénéfique dans le cas où on cherche à intensifier le mélange dans un canal en régime laminaire ou encore au niveau des échangeurs thermiques où le transfert de chaleur avec la paroi est amélioré (Park, (2013)).

L'étude des écoulements autour des obstacles reste une des vastes thématiques de la mécanique des fluides, et ses applications s'entendent sur des domaines très variés.

Afin d'explicitier les différents régimes d'instabilités générées en aval d'un obstacle, on utilise des géométries simples qui sont généralement de forme circulaires ou carrées. En raison de la simplicité de ce genre de configurations et du caractère typique de l'écoulement décollé (Williamson, 1996), le sillage derrière ce type d'obstacle a été depuis longtemps exploité pour développer de nouvelles études transposables par la suite à des géométries plus complexes. On présentera par la suite différents régimes d'écoulements autour d'un obstacle confiné, afin de souligner l'effet de la présence de paroi sur la topologie du sillage. En effet, pour ce type de configuration le sillage est conditionné par des différents paramètres hormis le nombre de Reynolds, tels que le rapport de confinement, la position de l'obstacle par rapport à la paroi ou le gap (Rehimi et al., 2008).

Bearman et Zdravkovich (1978) se sont penchés sur l'effet du confinement sur le sillage et ont constaté l'effet stabilisant de la présence des parois. Aral et al. (1991) ont discuté l'effet de rapprochement de l'obstacle à la paroi sur le comportement de sillage. Zovatto et Pedrizzetti (2001) ont souligné les principales différences affectant le sillage par rapport à un obstacle placé dans un canal infini. En effet, la présence des parois entrainera une modification du profil de vitesse incident et donc un comportement dynamique en aval de l'obstacle différent. En outre, une contrainte irrotationnelle due à l'imperméabilité des parois aura tendance à limiter le développement du sillage dans la direction orthogonale de l'écoulement. D'autre part, les interactions entre les tourbillons et les couches limites des deux parois du canal, généreront des tourbillons secondaires éjectés des parois qui peuvent eux-mêmes interagir avec les premiers tourbillons ; ce qui rend encore le problème plus complexe (Guerrouache, 2000 ; Rehimi, 2006).

Dans ce qui suit, on s'intéressera au cas de l'écoulement autour d'un obstacle placé entre deux parois parallèles. On présentera ainsi les différents régimes d'écoulement obtenus pour un profil de vitesse laminaire à l'entrée du canal. On discutera par la suite l'influence de certains paramètres sur le sillage obtenu derrière l'obstacle.

## **2.1.2 Dynamique de l'écoulement**

### **2.1.2.1 Équations gouvernant l'écoulement**

On traitera dans ce qui suit le problème, de point de vue purement dynamique, les effets d'origine thermique ne seront pas pris en compte.

Soit un écoulement laminaire d'un fluide newtonien et incompressible de viscosité dynamique  $\mu_f$  et de masse volumique  $\rho_f$  constantes, dans un canal de hauteur  $h$  dans lequel un cylindre de diamètre  $d$  est placé à une distance  $\Delta$  de la paroi la plus proche (figure.2.3).

Les bilans de conservation de la masse et de la quantité de mouvement du fluide s'écrivent :

$$\nabla \cdot \vec{U}_f = 0 \quad (2.1)$$

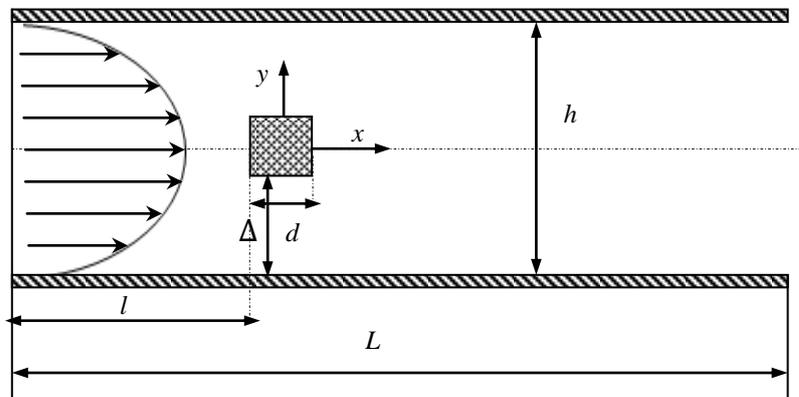
$$\frac{\partial \vec{U}_f}{\partial t} + \vec{U}_f \cdot \nabla \vec{U}_f = -\frac{1}{\rho_f} \nabla P + \nu_f \nabla^2 \vec{U}_f \quad (2.2)$$

avec  $\nu_f = \frac{\mu_f}{\rho_f}$  est la viscosité cinématique du fluide constante.

Le rapport de confinement  $r$  et le taux de blocage ou gap  $\gamma$  sont définis par :

$$r = \frac{d}{h} \quad ; \quad \gamma = \frac{\Delta}{d}$$

En absence de l'obstacle, on assiste à un écoulement laminaire décrit par un profil de Poiseuille (figure2.3).



**Figure 2.3 :** Géométrie d'étude de l'obstacle en milieu confiné

Les conditions aux limites associées à l'écoulement de fluide sont :

- à la surface de l'obstacle :  $\vec{U}_f = \vec{0}$

- à l'entrée du canal, un profil de vitesse parabolique  $U_f = u(y)$  ;  $v = 0$  avec  $u$  et  $v$  sont respectivement les composantes axiale et radiale de la vitesse.

Sur les parois :  $y = 0 \Rightarrow u = v = 0$   
 $y = h \Rightarrow u = v = 0$

Le nombre de Reynolds utilisé est défini par :  $Re = \frac{\rho_f U_d d}{\mu_f}$

où  $U_d$  désigne la vitesse moyenne débitante, définie par :  $U_d = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy$

Les différents autres paramètres de contrôle de l'écoulement seront explicités dans la partie (2.2.3).

### 2.1.2.2 Régimes d'écoulement

#### a- Régime rampant

Lors du régime de Stokes ou régime rampant, l'écoulement est stationnaire. En effet, il épouse la forme de l'obstacle et se referme immédiatement en aval ne laissant aucun sillage ni instabilité. Ce régime est obtenu pour des nombres de Reynolds très faibles  $0 \leq Re \leq 8$  (Rehimi, 2006). Dans le cas d'un obstacle circulaire, la gamme du nombre de Reynolds limitant le régime rampant est très proche  $Re < 8,75$  selon les travaux numériques de Guerrouache (2000).

#### b- Régime de recirculation

En augmentant le nombre de Reynolds au-delà de la valeur limite du régime rampant  $Re = 8$ , il se forme deux tourbillons contrarotatifs symétriques à l'aval au voisinage immédiat à l'aval de l'obstacle. Ce régime s'étend à une valeur du nombre de Reynolds critique  $Re_c \approx 70$  selon les travaux expérimentaux de Okajima (1997). Les résultats des travaux expérimentaux de Rehimi et al. (2008) sont en bon accord avec ceux d'Okajima (1997), et montrent que ce régime s'étend à une valeur  $Re_c = 75$ .

Pour cette gamme des nombres de Reynolds, l'écoulement est axisymétrique et la longueur des deux tourbillons contrarotatifs augmente en fonction du nombre de Reynolds.

La distribution du champ de pression fait apparaître une importante surpression en amont de l'obstacle, puis la pression chute rapidement jusqu'en aval où il y a un fort déficit de pression.

Des études similaires sont menées pour des obstacles cylindriques, ont montré que le régime de recirculation s'étend jusqu'à un nombre de Reynolds  $Re_c = 68,5$  (Rehimi, 2006). Guerrouache (2000) a défini une relation empirique pour le calcul de la longueur de recirculation  $L_r$  en fonction du nombre de Reynolds et du diamètre du cylindre :

$$\frac{L_r}{d} = -2,1535 \cdot 10^{-4} Re^2 + 5,0464 \cdot 10^2 Re - 0,43093 \quad (2.3)$$

D'autre part, d'après les travaux de Parantoën et al. (1998) sur les obstacles en milieux infinis, le nombre de Reynolds critique se trouve aux environs de  $Re_c = 45$  ; ce qui montre bien l'effet du confinement qui affecte amplement la stabilité du sillage.

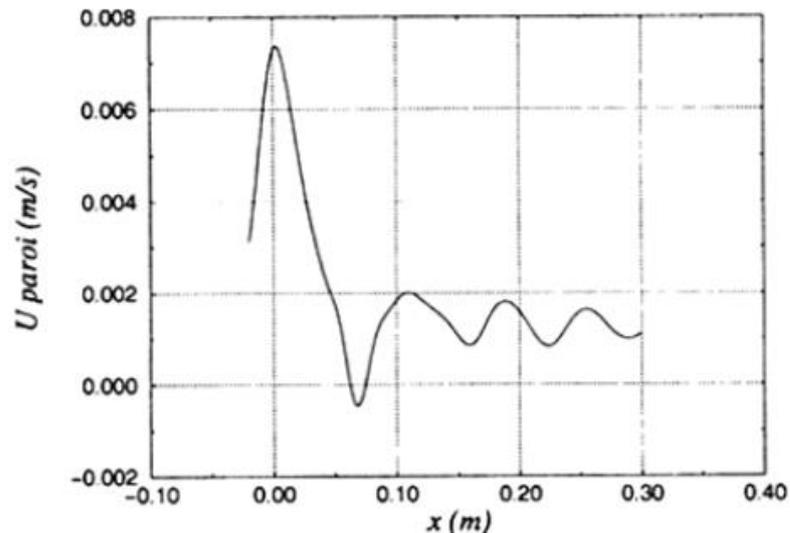
#### c- Régime périodique

Au-delà de la valeur critique du nombre de Reynolds, l'écoulement commence à perdre son axisymétrie. Les tourbillons contrarotatifs en aval de l'obstacle se déforment et le sillage devient instable. On assiste, alors, à un détachement alterné de paires de tourbillons de sens opposés et le sillage commence à osciller périodiquement. Cette rangée de tourbillons émis dans le sillage de l'obstacle forme la fameuse allée de von Kármán.

Ce régime se prolonge jusqu'à des nombres de Reynolds  $Re = 300$  selon les résultats des travaux de Carte (1994) et de Chen et al. (1995).

A ce stade, la présence des parois et par conséquent le rapport de confinement jouent un rôle très important dans la dynamique du sillage. Kiehm (1986) constate que pour une valeur de confinement  $r$  supérieure à 0,3, l'effet des parois commence à se manifester sur le sillage par l'apparition des premiers tourbillons secondaires, résultat d'une interaction entre le sillage et les couches limites aux parois du canal. Guerrouache (2000) constate que la présence des parois du canal entraîne une atténuation rapide du sillage (à partir d'une distance de  $10 d$  du cylindre). Cependant, la taille de ces tourbillons dépend fortement du nombre de Reynolds. En augmentant ce dernier, on constate l'apparition de nombreux tourbillons de paroi dont la taille devient plus grande.

En traçant le profil instantané de la composante de la vitesse longitudinale près des parois, on peut détecter ces instabilités secondaires. Sur la figure (2.4), on peut reconnaître la trace négative d'un tourbillon secondaire.



**Figure 2.4 :** Vitesse longitudinale le long de la paroi supérieure pour  $Re = 100$  (Guerrouache, 2000)

D'une manière qualitative, on peut décrire l'évolution temporelle des lâchers. On assiste au développement en taille et en intensité d'un tourbillon qui se détache et se déplace en direction de la paroi. Celui-ci s'oppose par la création d'un tourbillon secondaire de sens opposé. Ejecté dans le sillage, ce vortex interagit avec les tourbillons primaires. Ce phénomène se répète alternativement à une fréquence bien déterminée.

On définit classiquement un nombre adimensionnel dit de Strouhal, pour caractériser la fréquence des lâchers tourbillonnaires, et qui permet de comparer les quantités d'accélération instationnaires et convectives. Ce nombre est défini par :

$$S_t = f \frac{d}{U} \quad (2.4)$$

où  $f$  est la fréquence de détachement tourbillonnaire.

Pour évaluer la fréquence dominante dans le sillage, on effectue une analyse fréquentielle des signaux temporels relatifs aux coefficients de traînée, de portance, d'aspiration ou de vitesse.

L'effet de la présence des parois entraîne une augmentation du nombre de Strouhal par rapport à un obstacle placé en milieu infini. On explicitera dans une seconde partie l'effet de la variation des paramètres de contrôle sur l'évolution de ce nombre adimensionnel.

Plusieurs autres caractéristiques des lâchées tourbillonnaires derrière un obstacle confiné ont été déterminées. Guerrouche (2000) a mesuré la distance entre deux tourbillons consécutifs et l'a comparée au cas d'un obstacle placé en milieu infini. Les travaux de Zdravkovich (1997) ont montré que l'allée tourbillonnaire peut se restreindre à une seule rangée de tourbillon de même signe si le gap diminue et peut même être supprimée en dessous d'une certaine valeur. Rehimy dans sa thèse (2006) a analysé ces structures tourbillonnaires et a étudié l'impact du passage de ces structures sur le gradient pariétal de vitesse.

#### **d- Instabilités tridimensionnelles**

Une analyse fréquentielle de l'écoulement montre que la fréquence augmente quasi linéairement avec l'inertie. Cependant, pour certaines valeurs du nombre de Reynolds, on assiste à l'apparition de formes de discontinuités dans l'évolution de la fréquence. Ces « irrégularités » s'associent, au niveau de l'écoulement, à un phénomène d'étirement tourbillonnaire produisant ainsi des instabilités tridimensionnelles.

Cette transition tridimensionnelle a été initialement révélée par les premières visualisations d'écoulement effectuées par Hama (1957) et Gerrard (1958). Ils ont remarqué, tout d'abord une distorsion et un étirement progressifs des tourbillons sous leur propre induction, tout au long de leur convection dans le sillage, qui finit par une éventuelle brisure.

Williamson (1988b) était parmi les pionniers qui se sont penchés sur ce phénomène. Dans ses travaux sur un obstacle cylindrique, il a constaté qu'en réalité il existe deux transitions successives qui prennent place afin de créer ce type d'instabilité tridimensionnelle du sillage. Il associe alors chacune de ces transitions à une discontinuité au niveau de la courbe de l'évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds (Figure 2.5). Ces discontinuités sont alors notées *mode* « **A** » et *mode* « **B** » (Williamson 1988a).

Le mode « **A** » marque le déclenchement des instabilités tridimensionnelles. Il a été localisé expérimentalement selon Williamson (1996a) à une valeur du nombre de Reynolds  $Re \approx 190$ .

Les travaux numériques de Henderson (1997) et Barkley et al. (2000) ont montré que le mode « **A** » s'annonce par une chute de fréquence, indiquant la possibilité de présence d'une hystérésis qui se

déclenche à un nombre de Reynolds  $Re = 180$  ; ce qui est en bon accord avec les résultats expérimentaux de Williamson.

En augmentant le nombre de Reynolds, une deuxième discontinuité dans la courbe St-Re, moins prononcée que la première, se produit. C'est le mode « B ». Cependant, contrairement au mode A, la fréquence, au cours de cette discontinuité, augmente. Il s'agit alors d'un transfert énergétique entre le mode « A » et le mode « B ».

Ce mode se localise selon les résultats expérimentaux de Williamson à un nombre de Reynolds entre 230 et 260, alors que Henderson (1997) et Barkley et al. (2000), en se basant sur des analyses de stabilité, constatent que le mode B se manifeste pour une plage de nombres de Reynolds allant de 190 à 259.

D'autres caractéristiques distinctives des deux modes ont été constatées par Williamson (1996). Visuellement, les structures du mode « A » se caractérisent par la formation de tourbillons larges et ondulants dans le sens de l'écoulement, de longueur d'onde environ égale 3 à 4 fois le diamètre du cylindre, et reliant les tourbillons de von Kármán. Alors que le mode B est caractérisé par des boucles de vortex plus fines et de longueur d'onde plus courte, environ égale au diamètre du cylindre.

Récemment, Luo et al. (2003,2007) ont étudié expérimentalement le cas d'un obstacle carré et ont comparé cette transition tridimensionnelle aux résultats de Williamson pour un obstacle circulaire. Les modes de transition ont été identifiés grâce à la détermination des discontinuités au niveau de l'évolution St-Re à des valeurs moyennes de  $Re \approx 160$  et  $Re \approx 204$  respectivement pour le début des modes A et B. A l'aide de visualisation par PLIF (Fluorescence Induite par Nappe Laser), en plus de mesures par PIV, il a pu observer les instabilités tridimensionnelles dans l'écoulement. Il a constaté que le comportement de ces structures est similaire au cas d'un obstacle cylindrique. Le mode A se manifeste par une combinaison d'un étirement et d'une déformation des tourbillons primaires et une chute brusque au niveau de la courbe d'évolution St-Re. La longueur d'onde du mode A est de l'ordre de  $5.1d$ . (Figure 2.6-2.7).

D'autre part, le déclenchement du mode B est marqué par un accroissement brusque du nombre de Strouhal, mais contrairement au mode A, cette discontinuité n'est pas une hystérésis.

La longueur d'onde, dans la direction de l'écoulement, caractérisant les instabilités du mode B a été déterminée et est d'environ  $1.3d$  pour un nombre de Reynolds  $=228$ . Ces structures tridimensionnelles sont plus petites que celles observées dans le mode A, mais de vorticité plus

importante ; ce qui peut s'expliquer par l'existence d'un effet *straining* dans l'écoulement au niveau des centres des tourbillons (Figure 2.8-9)

Plusieurs études numériques ont été entamées concernant les instabilités tridimensionnelles pour un obstacle carré. Robichaux et al. (1999), en se basant sur les analyses de stabilité de Flouquet, ont reporté une longueur d'onde du mode A de l'ordre de  $5.2d$  se déclenchant à un nombre de Reynolds= $161$ , suivi du mode B de longueur d'onde  $1.2d$  se déclenchant à un nombre de Reynolds  $Re=190$ .

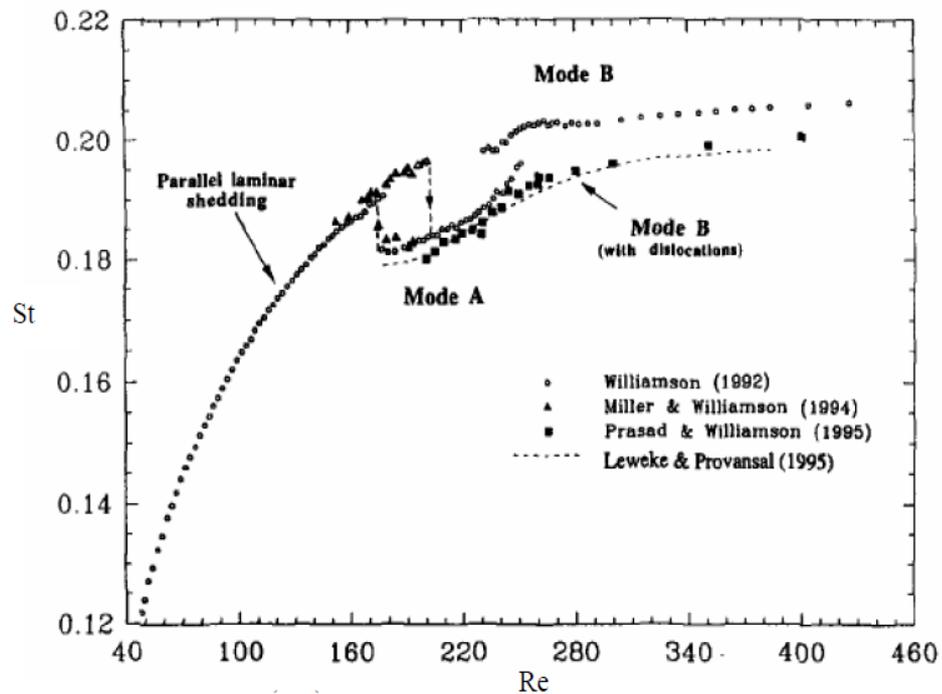
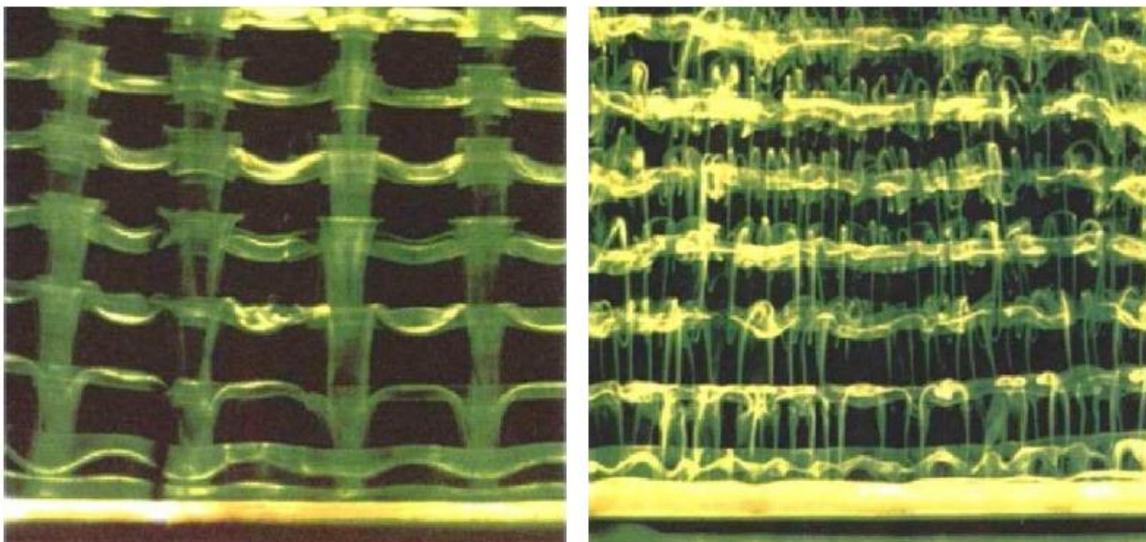


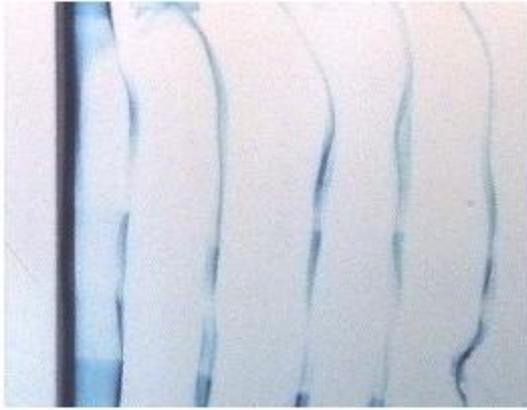
Figure 2.5 : Courbe de  $St = f(Re)$  et localisation du mode A et du mode B



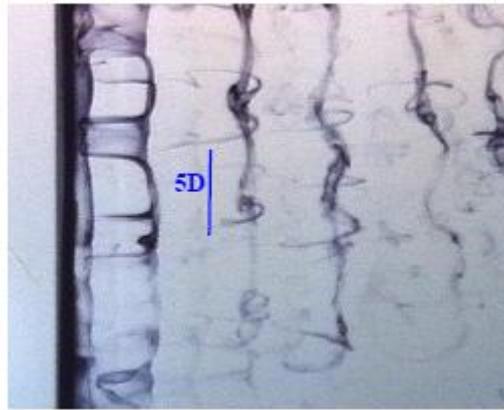
(a) mode A ( $Re = 200$ )

(b) mode B ( $Re = 270$ )

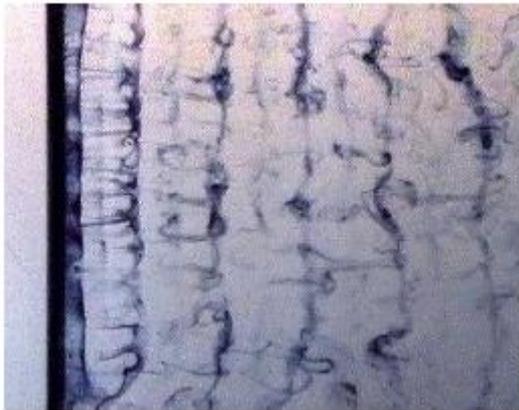
Figure 2.6 : Visualisations de Williamson (1996b) et instabilités tridimensionnelles cylindre circulaire: mode A et mode B



(a)  $Re=155$



(b)  $Re=188$

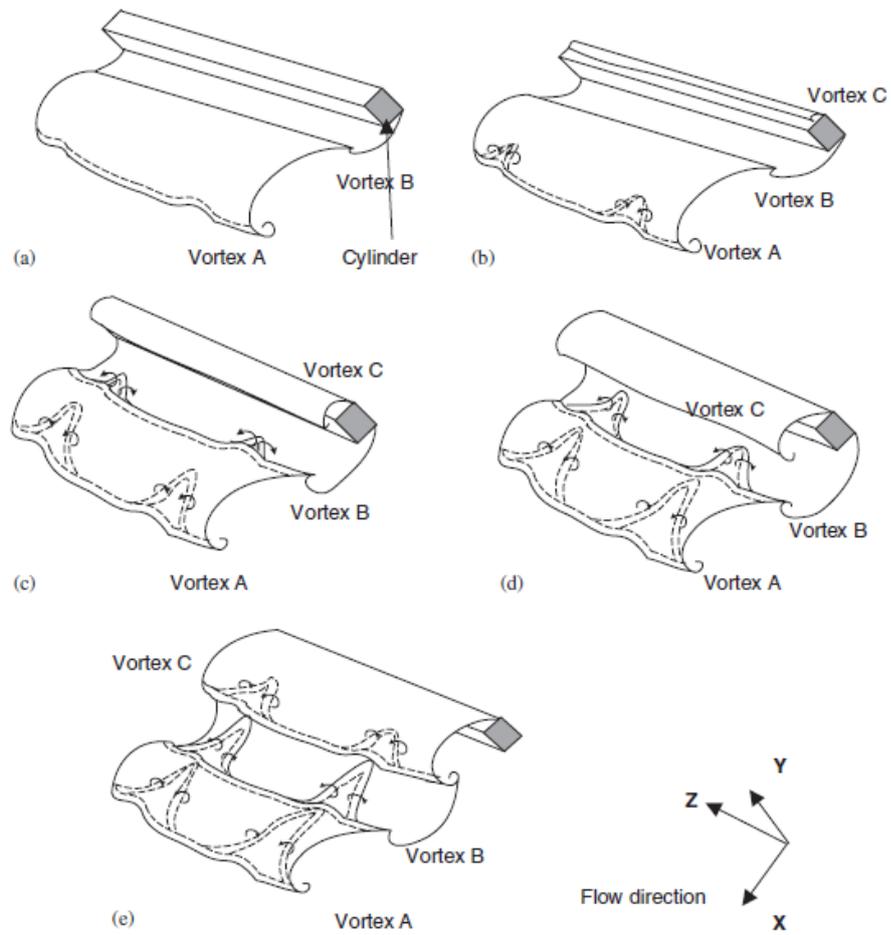


(c)  $Re=244$

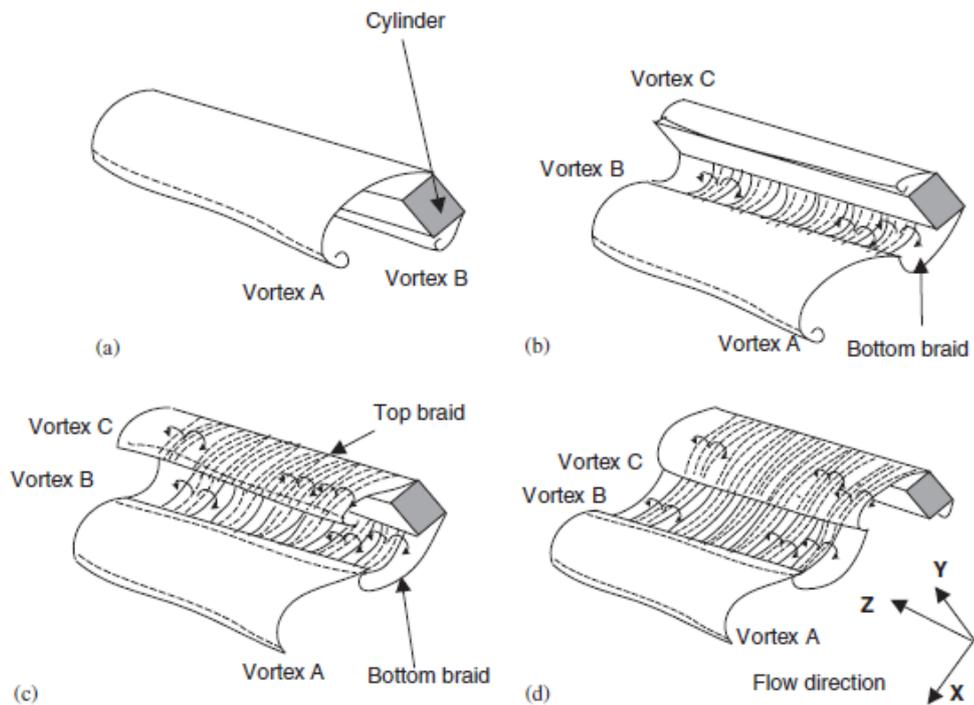


(d)  $Re=331$

**Figure 2.7** : Sillage de l'obstacle carré ( placé à gauche des photographies) pour différents nombres de Reynolds l'écoulement est de gauche à droite (Xiaohu, 2003)



**Figure 2.8** : Évolution des structures tourbillonnaires au niveau de mode A. L'écoulement est selon la direction x (Luo et al., 2007)



**Figure 2.9** : Évolution des structures tourbillonnaires au niveau de mode B. L'écoulement est selon la direction x (Luo et al., 2007)

### e- Régime sub-critique

Pour une valeur du nombre de Reynolds supérieure à 300, une couche limite laminaire se développe de part et d'autre de l'obstacle, qui subit ensuite un décollement pour une valeur du nombre de Reynolds avoisinant  $Re = 2000$ . Le sillage est dans ce cas complètement turbulent et composé de structures tourbillonnaires importantes.

### 2.1.2.3 Paramètres de contrôle de l'écoulement

#### a- Vitesse de l'écoulement à l'entrée

Certains paramètres sont susceptibles de modifier complètement la topologie du sillage. En effet, le profil de vitesse amont agit sur les différents régimes d'écoulement cités précédemment. Cette influence peut se manifester sur les valeurs des nombres de Reynolds critiques caractérisant l'apparition et le type des instabilités dans le sillage.

En considérant un écoulement de fluide laminaire dans le canal, décrit par un profil de Poiseuille en absence de l'obstacle, ce profil pleinement développé, s'écrit sous la forme :  $u(y) = U_m y(y - h)$  où  $U_m$  correspond à la vitesse maximale.

Dans ce cas, un paramètre de cisaillement  $K$  est défini et s'écrit sous la forme (Kiya, et al., 1999 ; Rehim, 2006) :

$$K(y) = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{d}{U_d} = \frac{2U_m d}{U_d} \quad (2.5)$$

$U_d$  est la vitesse débitante :

$$U_d = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy = \frac{h^2 U_m}{6} \quad (2.6)$$

D'où  $K(y) = 12 \left( \frac{d}{h} \right)$  si  $y = d$

Guerrouache (2000) ainsi que Kiya et al. (1999) relient ce paramètre de cisaillement  $K$  au retard du déclenchement du régime périodique par rapport au cas d'un obstacle placé dans un milieu infini. Ils associent ainsi l'accroissement du nombre de Strouhal au cisaillement produit par les parois.

#### b- Paramètre de gap

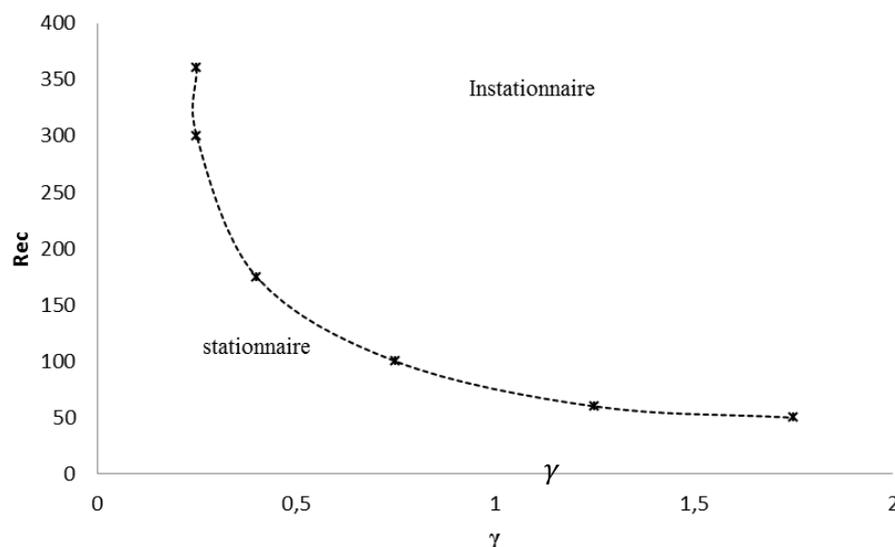
Parmi les paramètres de contrôle influant sur la topologie de l'écoulement, le paramètre de gap, défini par le rapport entre la distance du cylindre par rapport à la paroi la plus proche,  $\Delta$  et le diamètre  $d$  ; soit  $\gamma = \frac{\Delta}{d}$ .

En effet, la position de l'obstacle par rapport à la paroi du canal joue un rôle très important dans la structure du sillage. Ceci se traduit par plusieurs effets. Le rapprochement de l'obstacle d'une paroi entraîne une asymétrie au niveau du profil de la vitesse ; ce qui modifie la structure du sillage en aval de l'obstacle.

D'autre part, la présence d'une paroi proche de l'obstacle entraîne une interaction entre la couche limite développée et les instabilités créées par l'obstacle.

Zdravkovich (1997), a montré que le gap affecte les détachements alternés qui se limitent à une seule rangée de tourbillons de même signe qui peuvent même coalescer et disparaître à partir d'une certaine valeur du gap d'environ  $\gamma = 0,2$  à  $0,5$  selon Lei et al. (1999). En conséquence, la valeur du nombre de Reynolds critique  $Re_c$  est étroitement liée au paramètre de gap. Le régime critique aura tendance à s'attarder lorsqu'on approche le cylindre d'une paroi et donc entrainera une diminution des fréquences de détachement et par suite une diminution du nombre de Strouhal.

Zovatto et Pedrizzetti (2001) ont tracé l'évolution du nombre de Reynolds critique en fonction de la position de l'obstacle par rapport à la paroi (Figure.2.10) et ont délimité ainsi le domaine stationnaire du domaine instationnaire. Ils ont constaté ainsi que pour un gap réduit, le régime périodique est amplement retardé :  $Re_c$  entre 300 et 360 pour  $\gamma = 0.25$ .



**Figure 2.10** : Évolution de la longueur de recirculation en fonction du paramètre de gap (Wang et al., 2007)

### c- Rapport du confinement

Les travaux expérimentaux sur les écoulements autour d'obstacles étaient majoritairement focalisés sur les milieux infinis (rapport de confinement négligeable) Okajima et al. (1982). Knauss et al. (1976) et Davis et al. (1984), étaient probablement parmi les premiers qui se sont penchés sur l'effet du confinement sur les modifications des caractéristiques de l'écoulement. Ils ont ainsi lié la présence des parois à l'augmentation des fréquences de détachement, et donc du nombre de Strouhal.

Plusieurs études numériques ont confirmé, par la suite, ces résultats pour des faibles nombres de Reynolds ( $Re < 300$ ) (Sohankar, 1998 ; Mukhopadhyay, 1992 ; Turki, 2003).

Récemment, Patil et Tiwari (2008) ont exploité l'effet de l'augmentation du confinement sur le nombre de Reynolds critique. A travers leurs simulations 2D, ils ont constaté l'existence d'un confinement critique au-delà duquel la présence de la paroi n'a plus d'effet sur le déclenchement du régime périodique. Ces résultats ont été aussi constatés antérieurement par les travaux de Sharma et Eswaran (2004).

Sharify et al. (2011) ont étudié expérimentalement l'effet du confinement sur la structure du sillage en régime périodique pour un coefficient de blocage variant entre 0.15 et 0.3 pour un obstacle carré placé au milieu d'un canal rectangulaire. Ils ont ainsi noté que plus le confinement est important plus les lâchées ont tendance à disparaître.

Sahin et Owens (2004) ont effectué des études de stabilité ainsi que des simulations numériques directes derrière un obstacle cylindrique entre deux plans pour des coefficients de confinement allant de 0,1 à 0,9. Basés sur une analyse linéaire, ils ont identifié un rapport de confinement critique autour de 0,5 pour un cylindre circulaire.

Zovatto et al. (2001) et Guerrouche (2000) ont fait varier le coefficient de confinement pour un nombre de Reynolds fixé  $Re = 100$ . Ils ont ainsi observé que pour  $r = 0,1$ , les résultats sont semblables au cas du milieu infini. Les tourbillons alternatifs émis dans le sillage forment alors deux rangées parallèles espacées verticalement d'une distance de l'ordre de  $1,3d$ . En augmentant le coefficient de confinement, cette distance diminue rapidement. L'évolution du nombre de Strouhal en fonction du rapport de confinement est rapportée par le tableau (Tab.1). Les valeurs relevées montrent bien une augmentation du nombre de Strouhal en fonction du rapport de confinement. Cependant, au-delà d'une valeur de  $r = 1/8$ , le nombre de Strouhal se stabilise ; ce qui s'explique par la disparition des effets du confinement.

<i>r</i>	<i>1/10</i>	<i>1/9</i>	<i>1/8</i>	<i>1/7</i>	<i>1/6</i>	<i>1/5</i>	<i>1/4</i>	<i>1/3</i>
<i>St</i>	0,25	0,25	0,25	0,251	0,255	0,262	0,282	0,341

**Tableau 1 :** Évolution du nombre de Strouhal en fonction du confinement pour un obstacle circulaire (Guerrouache, 2000)

D'autre part, le confinement affecte aussi la transition au régime d'instabilités tridimensionnelles. Wen et Lin (2001) ont montré, à travers leurs travaux expérimentaux, que pour un confinement petit de l'ordre de 0,08, les deux modes A et B disparaissent totalement.

Pour un coefficient de confinement beaucoup plus élevé ( $r=1/3$ ), Rehim et al. (2008) ont montré l'apparition prématurée du mode A et un début plus retardé du mode B.

Plus récemment, à travers une analyse de stabilité linéaire pour un même confinement ( $r=1/3$ ), Griffith et al. (2010) ont constaté que la transition tridimensionnelle se restreint uniquement au mode B d'instabilités, alors que le mode A disparaît. Cependant, pour un confinement un peu plus petit ( $r=1/5$ , Camarri et Giannetti (2010) trouvent que le nombre de Reynolds déclenchant le mode A reste presque le même que celui d'un obstacle en milieu infini.

Cependant, il est important de noter que l'influence des parois sur le sillage n'est pas uniquement due au confinement de l'écoulement, mais aussi à d'autres paramètres liés à la nature même de ces parois tels que sa rugosité ou encore sa perméabilité.

## 2.2 Écoulement de Couette Taylor

### 2.2.1 Introduction et historique

L'écoulement de Couette-Taylor est un écoulement azimutal axisymétrique et cisailé. Il tient une place primordiale dans l'histoire de la dynamique des fluides. C'est en effet le premier cas d'écoulement pour lequel l'analyse de stabilité fut confirmée par l'expérience de laboratoire (Taylor 1923). Vieux d'environ un siècle, il ne cesse de susciter de nouvelles recherches expérimentales, numériques ou même théoriques. En effet, depuis les premiers travaux piliers de Taylor, plus de 2000 articles scientifiques sont publiés sur ce sujet. Cet engouement s'explique certainement par la richesse et la complexité des structures mises en jeu en dépit de sa simple géométrie.

Dans la littérature, une grande majorité des travaux s'est focalisée sur l'étude des structures générées ainsi que les différents régimes d'instabilités. L'étude expérimentale de Coles (1965), devenu modèle de référence, consistait à une description, riche en photographies, des différents écoulements produits suite à la variation des régimes de rotation. On pourra aussi citer, dans le même contexte, Burkhalter et Koschmiede (1974) ou Boubnoy (1995). Plusieurs travaux numériques se sont aussi penchés sur la simulation des écoulements de Couette-Taylor, on pourra citer Marcus (1984), Fazel et al. (1984), ou encore Hua et al. (1997).

Les travaux pionniers de Taylor (1936) et Wendt (1933) restent, cependant, parmi les plus exhaustifs, vu la large gamme de régimes de rotation étudiés et les précieuses mesures prises dans une grande gamme de rapports de forme.

Nous présenterons dans ce qui suit un bref historique sur les différentes études menées sur les écoulements de Taylor-Couette depuis l'origine jusqu'à nos jours. On pourra dans ce cas s'appuyer sur la revue de Tagg (1994) qui demeure l'une des références les plus complètes concernant l'historique et les avancées de la recherche sur ce sujet.

On se projette, tout d'abord, à la fin du 17<sup>ème</sup> siècle où les premières études, des fluides entraînés par un cylindre en rotation, ont été entamées par Issac Newton. Environ deux siècles plus tard, et plus précisément en 1848, Gabriel Stokes reprend dans l'une de ses publications, le problème des fluides en rotation entre deux cylindres coaxiaux et mobiles. Il constata ainsi qu'une situation la plus instable est atteinte en en fixant le cylindre externe. En effet, la rotation du cylindre interne va créer une force centrifuge projetant les particules fluides vers la paroi externe immobile. Plus tard, en 1880, Lord Rayleigh a théorisé ce problème particulièrement pour les fluides non visqueux d'où le célèbre critère de Rayleigh qu'on explicitera par la suite.

D'autre part, l'introduction de la notion des fluides visqueux et de viscosité a suscité de nombreuses recherches sur la mise au point de méthodes de mesure de la viscosité.

En 1881 à Vienne, Max Margules proposa un premier modèle de viscosimètre constitué de deux cylindres concentriques. Neuf années plus tard, un chercheur Français, nommé Maurice Couette, reprit cette technique et concevait un appareil (stator interne / rotor externe) pour la mesure de la viscosité de l'eau. Il constatait alors que la viscosité reste constante pour des vitesses de rotation faibles et change subitement à partir d'un seuil critique qu'il identifiait comme étant la transition à la turbulence.

D'autre part, à cette même période, un scientifique Anglais, Arnulph Mallock, menant des expériences similaires à celles de Couette, mais avec un système (rotor interne/stator externe). Il montrait alors qu'un régime d'instabilité s'établit même pour des faibles vitesses de rotation.

Une dizaine d'années plus tard, Geoffrey Ingram Taylor a repris les résultats de Mallock et de Couette et s'est penché sur le sujet, combinant à la fois une approche théorique et approche expérimentale. Cependant, il prouva, contrairement aux constatations de Mallock, l'existence d'un seuil de transition dans le cas Rotor interne / Stator externe, mettant en cause certains paramètres de contrôle négligés par ce dernier.

Taylor concevait alors son propre dispositif en essayant de le rapprocher de l'hypothèse de cylindres infiniment longs qu'il avait supposé dans son analyse théorique et de limiter les vibrations au maximum. Il publia ainsi en 1923 un article de base (Taylor, 1923) rassemblant ses principaux résultats. Il traçait alors une courbe de transition qui s'avère en bonne concordance avec ses résultats théoriques et met alors en évidence l'existence de plusieurs types d'écoulements possibles dans la zone d'instabilité.

Depuis cet instant et jusqu'à nos jours, ce sujet n'a cessé de faire l'objet de nombreux travaux théoriques, expérimentaux, et plus tard numériques dans le but de découvrir et d'analyser la variété des structures et de comprendre leurs mécanismes de transition.

D'autres études aussi se sont développées sur des écoulements de Couette-Taylor modifiés, soit par l'utilisation de fluides différents (viscoélastiques par exemple), ou en imposant des « facteurs » externes tels qu'un gradient de température ou un écoulement axial.

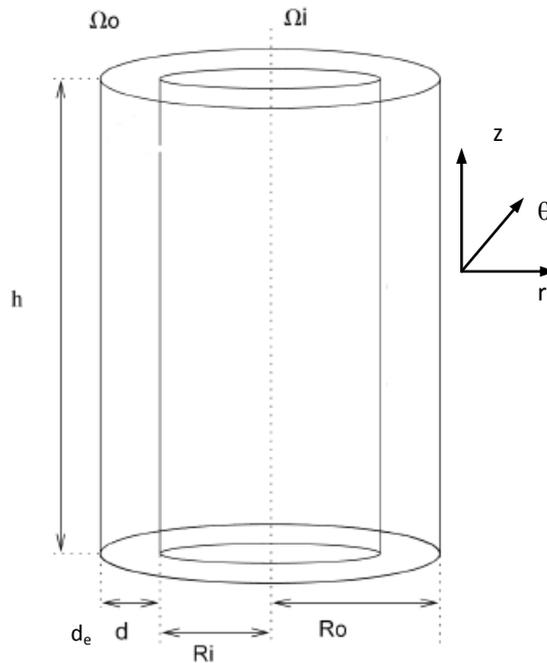
Actuellement, l'écoulement de Couette-Taylor est employé dans des domaines très variés. En génie des procédés, il est généralement utilisé pour le mélange de réactifs, pour la purification des eaux usées ou des liquides corporels comme le sang et pour l'extraction (liquide-liquide).

### **2.2.2 Dynamique de l'écoulement**

L'écoulement de Couette-Taylor est l'écoulement d'un fluide entre deux cylindres coaxiaux mobiles où l'un est fixe et l'autre est mobile.

On définit alors  $R_i$  et  $R_o$  respectivement le rayon du cylindre interne et du cylindre externe,  $\Omega_i$  et  $\Omega_o$  leurs vitesses angulaires et  $h$  leur hauteur. On notera par  $d_e$  la largeur de l'entrefer.

On considèrera dans notre cas la configuration rotor interne / stator externe, d'où  $\Omega_i = 0$  (Figure.2.11).



**Figure 2.11** : Schématisation du Dispositif de Couette-Taylor

### 2.2.2.1 Critère de Rayleigh

On considère un fluide non visqueux en rotation dans un espace annulaire de deux cylindres infiniment longs. Le cylindre externe étant fixe et le cylindre interne mobile. Si une particule fluide située à une distance  $r$  par rapport à l'axe de rotation et animée d'une vitesse purement radiale  $V(r) = r.\Omega_i(r)$ , subit une force centrifuge  $F = \rho \frac{V^2(r)}{r} = \rho.r.\Omega_i^2(r)$ , l'ensemble des particules éjectées exerce alors une pression sur la paroi du cylindre externe plus importante que celle près de la paroi du cylindre interne, créant ainsi un gradient de pression centripète à travers la cavité  $\frac{\partial P}{\partial r}$

Si l'écoulement est stable, les forces centrifuges et centripètes se compensent.

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho r \Omega_i^2(r) \quad (2.7)$$

On suppose que cette même particule s'est déplacée vers une nouvelle position  $r_1 = r + dr > r$ .

La force centrifuge exercée sur cette particule est  $F_1 = \rho r_1 \Omega_i^2(r_1)$ . En absence de dissipation visqueuse, son moment cinétique  $\Gamma = rV(r) = r\Omega_i^2(r)$  reste conservé.

$$D'où : \Gamma = r\Omega_i^2(r) = \Gamma_1 = r_1\Omega_i^2(r_1)$$

Donc, si le gradient de pression environnant est supérieur à la nouvelle force centrifuge  $F_1$ , la particule aura tendance à être repoussée vers sa position initiale. L'écoulement est donc dit *stable*.

Par contre, si le gradient de pression est inférieur à la force centrifuge, la particule suivra son mouvement vers l'extérieur et l'écoulement est alors qualifié d'*instable*.

La condition de stabilité peut donc s'écrire :

Pour un écoulement non-visqueux en rotation, une condition suffisante d'instabilité est la décroissance de la circulation en un point quelconque.

Soit :

$$r \cdot \Omega_i^2(r) \geq r_1 \cdot \Omega_i^2(r_1) \quad (2.8)$$

ou encore :

$$\frac{d}{dr} (r \Omega_i^2(r)) \geq 0 \quad (2.9)$$

Les écoulements qui n'obéissent pas à cette condition sont alors soumis à une instabilité dite centrifuge.

En projetant ce critère à notre cas d'étude :  $\forall r : R_i < r < R_e$ , l'équation (2.9) s'écrit alors :

$$R_e \Omega_e^2(R_e) - R_i \Omega_i^2(R_i) \geq 0$$

Puisque le cylindre externe est immobile, donc selon le critère de Rayleigh, il suffit que le cylindre interne tourne, même à des faibles vitesses, pour générer une situation d'instabilité ; ce qui réaffirme les constatations de Stokes.

Dans le cas de fluides réels, à cause de la viscosité qui dissipe l'énergie en chaleur, le moment cinétique n'est pas conservé ainsi l'apparition des instabilités centrifuges est retardée. Ce n'est donc qu'à partir d'une certaine vitesse de rotation du cylindre, néanmoins faible, que cette instabilité aura lieu.

On présentera par la suite, les paramètres de contrôle de l'écoulement et les facteurs pouvant influencer la stabilité de l'écoulement.

### 2.2.2.2 Paramètres de contrôle de l'écoulement

Les paramètres de contrôle permettent de caractériser l'écoulement et interviennent dans la détermination du seuil d'instabilité. On classera ces paramètres selon leur nature :

#### a- Paramètres géométriques

Ces paramètres sont liés à la conception géométrique du dispositif :

$$- \text{ Le rapport d'aspect } \Gamma = \frac{\text{hauteur des cylindre}}{\text{largeur annulaire}} = \frac{h}{R_e - R_i} = \frac{h}{d_e} \quad (2.10)$$

$$- \text{ Le rapport radial } \eta = \frac{\text{Rayon intérieur}}{\text{Rayon extérieur}} = \frac{R_i}{R_e} \quad (2.11)$$

$$- \text{ Le rayon de courbure } \delta = \frac{\text{largeur annulaire}}{\text{Rayon intérieur}} = \frac{R_e - R_i}{R_i} = \frac{d_e}{R_i} = \frac{1}{\eta} - 1 \quad (2.12)$$

### b- Paramètres d'inertie

$$- \text{ Le rapport des vitesses de rotation } \mu = \frac{\Omega_e}{\Omega_i} = 0 \quad (2.13)$$

$$- \text{ échelle de temps relative à la non-linéarité inertielle } \tau_i = \frac{d_e}{\Omega_i R_i} \quad (2.14)$$

$$- \text{ échelle de temps relative à la force centrifuge } \tau_f = \frac{1}{\Omega_i} \sqrt{\frac{d_e}{R_i}} \quad (2.15)$$

### c- Paramètres visqueux

$$- \text{ échelle de temps associée à la dissipation visqueuse } \tau_v = \frac{d_e^2}{\nu} \quad (2.16)$$

Ces paramètres vont nous permettre de définir des nombres caractéristiques adimensionnels :

- **Le nombre de Reynolds** : caractérisant le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses obtenu en faisant le rapport entre les équations (2.14) et (2.16) :

$$Re = \frac{\tau_v}{\tau_i} = \frac{\Omega_i R_i d_e}{\nu} \quad (2.17)$$

- **Le Nombre de Taylor** : caractérisant le rapport entre la dissipation visqueuse et la force centrifuge obtenu à partir des équations (2.18) et (2.19) :

$$T_a = \frac{\tau_v}{\tau_f} = \frac{\Omega_i R_i d_e}{\nu} \sqrt{\frac{d_e}{R_i}} = Re \sqrt{\delta} \quad (2.18)$$

On essayera par la suite de présenter les différents régimes d'instabilité en fonction de la variation du nombre de Taylor.

### 2.2.3 Régimes d'écoulement d'une configuration rotor-stator

Ce type d'écoulement a fait l'objet de beaucoup de travaux compte tenu de la facilité de sa réalisation. Pour des paramètres géométriques donnés et un rapport d'aspect suffisamment grand pour pouvoir supposer les cylindres infiniment longs, l'augmentation de la vitesse de rotation du cylindre interne entraine une succession de régimes d'écoulements.

Ces régimes présentent des particularités identifiabiles, comme les motifs des tourbillons ou le spectre en fréquence de la vitesse du fluide (Fenstermacher et al , 1979).

Andereck et al. (1986) ont identifié et nommé chacun de ces régimes d'instabilités en traçant un diagramme des transitions dans le plan (Reynolds externe, Reynolds interne) pour un système en rotation différentielle (rotor/ rotor).

Afin de présenter la cartographie de l'écoulement dans le cas de notre configuration (stator externe/rotor interne), on se réfèrera, toutefois, aux appellations d'Andereck des différents régimes.

### **2.2.3.1 Régime laminaire azimutal**

Ce régime d'écoulement est stable et sert généralement d'état de base pour les études de stabilité linéaire. En effet, de l'état de repos jusqu'au premier seuil de transition, l'écoulement suit le profil de Couette.

### **2.2.3.2 Régime des vortex de Taylor**

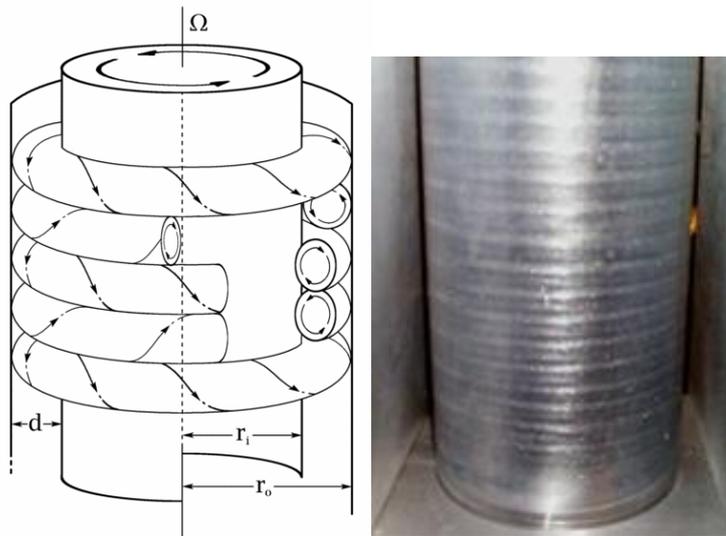
En faisant tourner le cylindre interne au-delà d'une vitesse critique et donc d'un nombre de Reynolds bien déterminé et éventuellement un nombre de Taylor critique, l'écoulement bifurque vers les structures toroïdales de Taylor (Fig. 2.12), deux rouleaux adjacents tournant en sens opposés dans un plan méridien.

Chaque paire de tourbillon a une longueur d'onde d'environ  $2d_e$  où  $d_e$  est la largeur de l'espace annulaire.

Suite à la formation de ces tourbillons, les particules de fluides proches du cylindre interne animées d'une vitesse supérieure par rapport aux autres particules, vont être entraînées vers l'extérieure de la zone inter-vortex. Au contrario, les particules à basse vitesse, proches du cylindre externe, vont être entraînées dans les zones internes entre les vortex.

Les vitesses axiales et radiales des vortex de Taylor sont relativement très faibles. Elles représentent généralement un faible pourcentage de la vitesse du cylindre interne (Wereley et Lueptow, 1998).

Ce type d'instabilité est, comme on l'a défini précédemment, le résultat de l'instabilité centrifuge obéissant au critère de Rayleigh.



**Figure 2.12** : Vortex contrarotatifs et axisymétriques de Taylor-Couette : a) Schématisation ; b) Visualisation en utilisant le dioxyde de titane et des paillettes de mica (Lueptow et al., 2002)

Si une particule de fluide est perturbée (légèrement déviée) de sa trajectoire initiale, elle rejoindra une zone où la force de « rappel », due au gradient de pression, est légèrement plus faible que la force d'inertie de la particule. En conséquence, une particule fluide perturbée vers l'extérieur poursuivra sa trajectoire vers l'extérieur et inversement pour les particules déplacées vers l'intérieur. Peu importe que la perturbation initiale soit vers l'extérieure ou vers l'intérieur, puisque dans tous les cas la conservation de la masse assure le retour de l'écoulement. D'où la création des rouleaux de Taylor. Cependant, l'apparition de ce régime peut être affectée par la viscosité du fluide qui amortit ces perturbations.

Sobolik et al. (2011) sont parvenus à une relation empirique du nombre de Taylor critique  $Tac$  de la première instabilité, pour  $0,5 < \eta < 1$ . Cette relation est donnée par l'équation suivante :

$$Tac = 36.2(\eta - 0.256)^{-0.445} \quad (2.19)$$

Pour  $\eta = 0,8$ , ils ont obtenu  $Tac = 47,46$ .

### 2.2.3.3 Régime des vortex de Taylor ondulés (WVF)

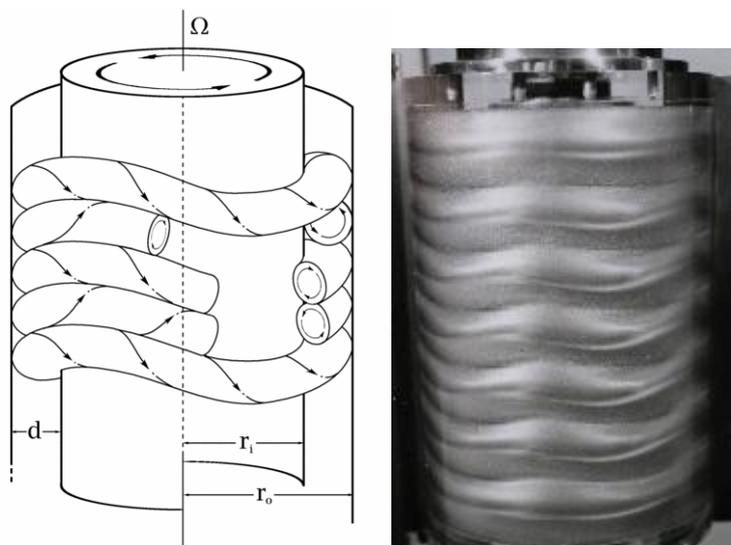
Le deuxième régime d'instabilité, obtenu en augmentant la vitesse de rotation, est appelé « Wavy Vortex Flow ». Ce seuil correspond à l'apparition d'ondulations azimuthales qui viennent se superposer aux cellules de Taylor et brisent l'axisymétrie des rouleaux (Fig. 2.13).

Sur le spectre de fréquences (Fig.2.14), les ondulations sont caractérisées par une même fréquence fondamentale correspondant à certain nombre d'harmoniques (Fenstermacher et al., 1979). Pour ce régime d'instabilité, les ondes se propagent à travers l'espace annulaire à une vitesse de 30 à 50 % de la vitesse du cylindre interne selon le nombre de Taylor (King et al., 1984).

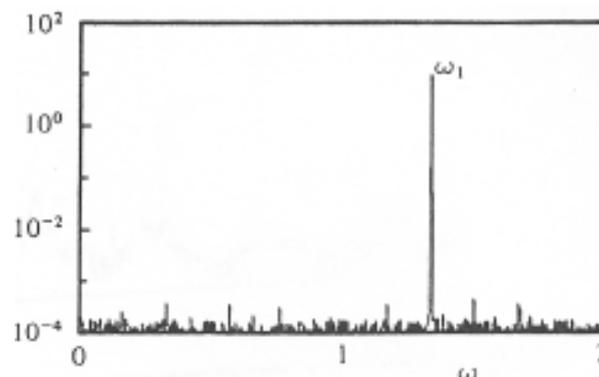
Le nombre de Taylor critique correspondant au deuxième seuil d'instabilité, et donc à la transition des rouleaux axisymétriques aux rouleaux ondulés, n'est pas fermement établi.

En effet, théoriquement selon Wereley et Lueptow (1998), la transition est prévue de se produire pour un nombre de Taylor adimensionné  $T_{ac2}^* = \frac{T_a}{T_{ac}} = 1,1$  pour un rapport radial  $\eta = 0,85$  et pour des cylindres supposés infiniment longs. Cependant Serre et al. (2008) ont montré qu'expérimentalement le seuil de la deuxième instabilité est à  $T_{ac2}^* = \frac{T_a}{T_{ac}} = 1.14$  à  $1.31$  pour un rapport radial  $\eta = 0,8$  à  $0,9$ . Ceci s'explique par la différence entre les conditions expérimentales.

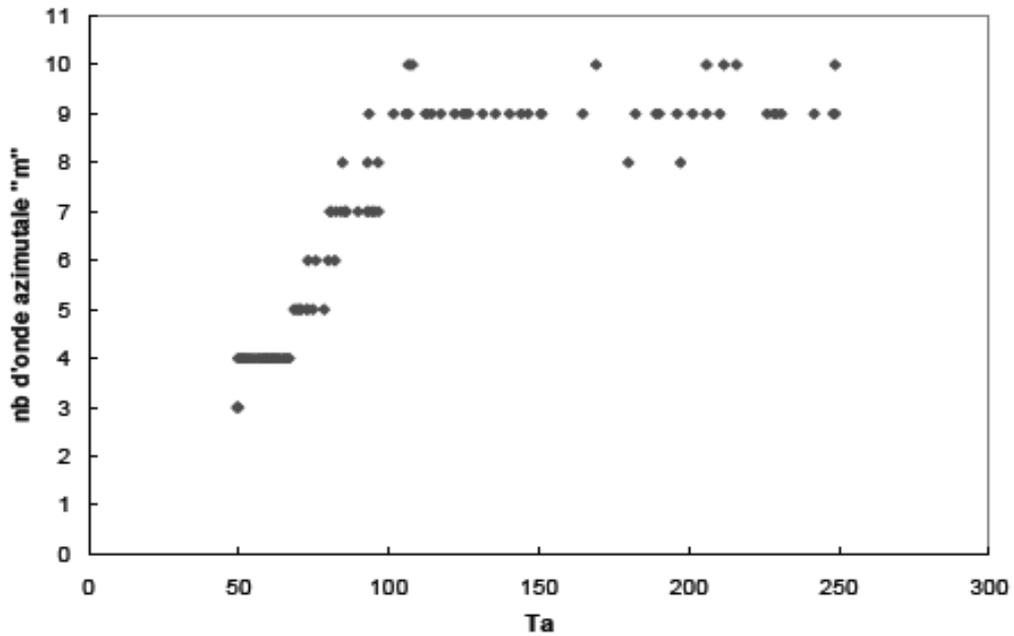
D'autre part, en se focalisant sur le nombre d'onde azimutale  $m$  qui est croissant en fonction du nombre de Taylor  $Ta$ , Mehel (2006) a constaté que sur la plage du régime WVF, deux « sous-régimes » coexistent. En effet, pour des nombres de Taylor proches du Taylor Critique  $T_{ac2}$ , le nombre d'onde azimutale vaut  $m = 3$ . Par la suite, en augmentant le nombre de Taylor, ce nombre d'onde azimutale augmente rapidement pour se stabiliser de nouveau à  $m = 9$  (Figure 2.15) pour une valeur de Taylor proche de 100. Cette deuxième plage se distingue donc par un écoulement indépendant du nombre de Taylor. Pour un rapport radial  $\eta = 0,91$  et un rapport d'aspect  $\Gamma = 44,3$  (Mehel, 2006) a caractérisé ce régime par une longueur d'onde  $\lambda = 2,5d_e$  et une fréquence  $f = 0,39.\Omega_i$ . Ce régime d'instabilité perdure jusqu'à l'apparition d'une modulation d'amplitude de l'onde azimutale correspondant au régime « Modulated Wavy Vortex Flow » MWVF.



**Figure 2.13** : Vortex contrarotatifs du régime ondulé de Taylor ou WVF : a) schématisation ; b) visualisation de l'écoulement (Lueptow et al., 2002)



**Figure 2.14** : Spectre fréquentiel de la vitesse radiale  $\eta = 0.877$ ,  $\Gamma = 20$  (WVF) (Fenstermacher et al., 1979)



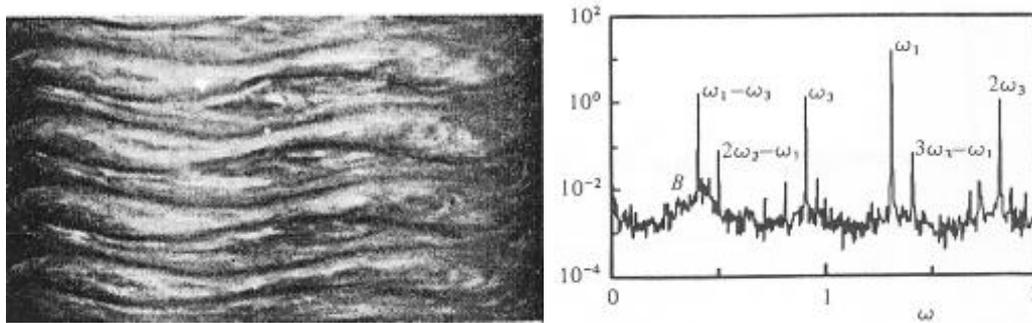
**Figure 2.15** : Évolution du nombre d'onde azimutal en fonction du nombre de Taylor en régime WVF ( $\eta=0,91$  ;  $\Gamma=44,3$ ) selon Mehel (2006)

#### 2.2.3.4 Régime des vortex de Taylor ondulés modulés (MWVF)

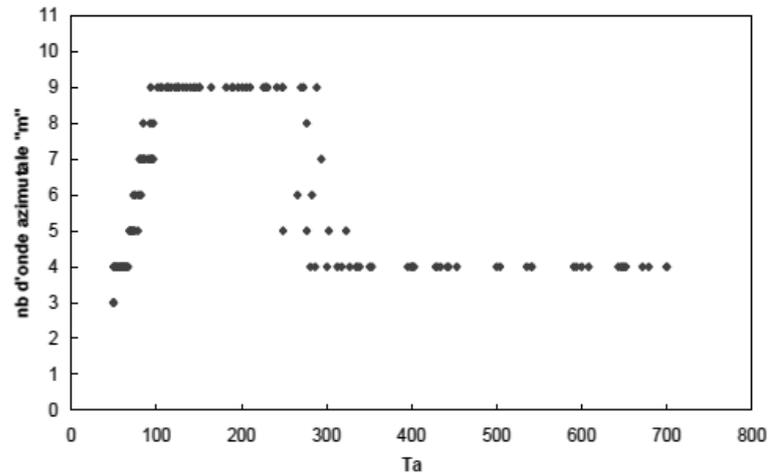
En augmentant encore plus la vitesse de rotation du cylindre interne, au-delà d'un certain seuil, un troisième type d'instabilité s'installe. Cette instabilité est facilement détectable en observant le spectre de fréquence. Une nouvelle fréquence fondamentale s'ajoute à la précédente (celle du WVF), puis d'autres fréquences résultant de la combinaison des deux fréquences fondamentales peuvent aussi apparaître dans le spectre (Figure 2.16-b).

D'autre part, de point topologie de l'écoulement, on observe, tout d'abord, des perturbations au niveau des rouleaux de Taylor qui paraissent déstructurés. Ceci est dû à la coexistence de plusieurs états d'écoulements. Par la suite, au-delà d'un certain nombre de Taylor, l'écoulement reprend une allure organisée (Figure 2.16-a).

Mehel (2006) a représenté l'évolution du nombre d'onde azimutale  $m$  en fonction du nombre de Taylor. Il a remarqué une diminution rapide du nombre d'onde azimutale (de  $m=7$  à  $m=4$  selon ses conditions expérimentales notées précédemment), qui correspond à la phase déstructurée de l'écoulement. Ensuite, lorsque l'écoulement se réorganise, le nombre d'onde devient invariant ( $m=4$ ) avec l'augmentation du nombre de Taylor (Figure 2.17).



**Figure 2.16** : a) Visualisation par technique Kalliroscope de la transition MWVF ; b) Spectre fréquentiel de la vitesse radiale  $\eta = 0.877$ ,  $\Gamma=20$  (Fenstermacher et al., 1979) :  $\omega_1$  et  $\omega_3$  fréquences fondamentales  $\omega_2$  fréquence résultante



**Figure 2.17** : Évolution du nombre d'onde azimutale en fonction du nombre de Taylor pour les régime (WVF) et (MWVF) ( $\eta=0,91$  ;  $\Gamma=44,3$ ) selon Mehel (2006)

### 2.2.3.5 Régime de turbulence « Turbulent Taylor Vortices » (TTV)

En augmentant encore plus la vitesse angulaire, l'écoulement devient faiblement turbulent. Pourtant, il garde encore la structure en rouleaux caractéristique (Figure 2.18-a).

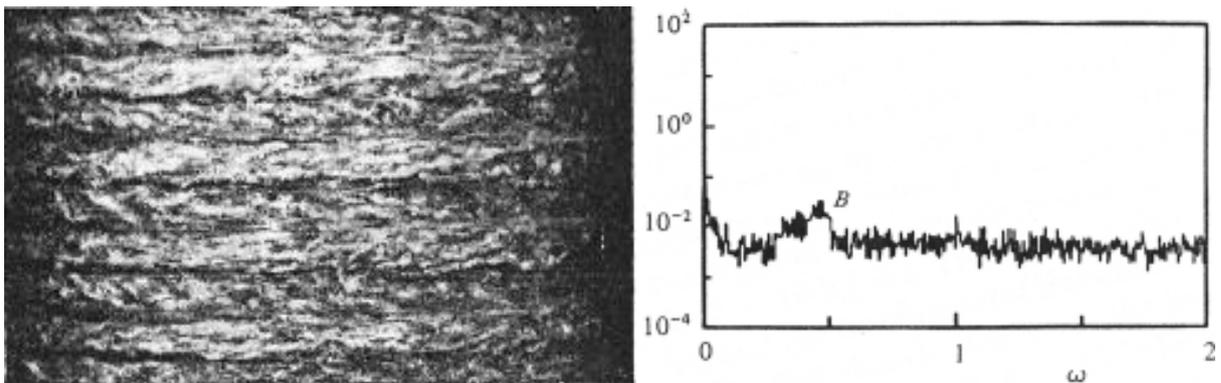
Le spectre de fréquence montre une disparition des pics et une large bande de bruit de fond qui prend place (Figure 2.18-b).

En effet, d'après Landau (1944), une transition vers un nouveau mode instable se traduit par l'émergence d'une nouvelle fréquence fondamentale qui s'ajoute aux fréquences des modes précédents. L'état turbulent est alors atteint après une succession infinie de telles bifurcations. L'écoulement est alors caractérisé par une quantité de fréquences, certes grandes mais finies. D'où, la transition n'est pas réellement chaotique.

En 1971, Ruelle et Takens proposent une nouvelle vision de la transition turbulente. L'écoulement bifurque d'abord vers un régime périodique (une fréquence fondamentale), puis ensuite vers un régime bi-périodique (deux fréquences fondamentales). Par la suite, deux scénarios sont envisageables :

L'écoulement peut transiter vers le chaos spatio-temporel sous l'effet de perturbations, ou bifurquer une troisième fois vers un nouvel état quasi-périodique (à trois fréquences fondamentales) avant de

devenir chaotique sous l'effet de perturbations. Ce phénomène est bien observé au niveau de la transition turbulente dans le système de Couette-Taylor.



**Figure 2.18** : a) Visualisation par technique Kalliroscope de la transition TTF ; b)- Spectre fréquentiel de la vitesse radiale  $\eta=0.877$ ,  $\Gamma = 20$  (Fenstermacher et al., 1979)

### 2.2.4 Paramètres influents sur les instabilités

Une des propriétés d'un écoulement de Couette Taylor, est que ses caractéristiques finales dépendent de toutes les étapes précédentes. En effet, en se focalisant sur leurs travaux concernant la topologie des transitions, Coles et al. (1965) étaient parmi les premiers à noter qu'on pourrait obtenir des régimes WVF avec des longueurs d'ondes axiale et azimutale différentes même en fixant les paramètres géométriques du système et en gardant les mêmes vitesses de rotation.

D'autres auteurs se sont intéressés par la suite aux autres régimes d'instabilités, tels que Snyder et al. (1969) et Burkhalter et al. (1974), qui ont constaté une variation des nombres de rouleaux générés pour une même hauteur  $h$  au niveau du régime TVF, autrement dit, une variation de la longueur d'onde axiale.

L'origine de ces variations peut être expliquée par l'accélération du cylindre. En effet, une augmentation brusque de la vitesse de rotation peut ne pas fournir les mêmes caractéristiques de l'écoulement qu'une augmentation quasi-statique d'une valeur nulle à la valeur finale de la vitesse. Cole et al. (1965) ont exploité cette piste et ont constaté que suite à une augmentation progressive de la vitesse de rotation, le nombre d'ondes azimutales  $m$  croît par paliers sous forme d'hystérésis ; ce qui veut dire que pour une même vitesse, deux configurations différentes peuvent se manifester.

Les effets de bord peuvent affecter les instabilités. En effet les transitions entre les régimes d'instabilités peuvent subir des décalages pour des systèmes de longueurs finies (Mullin et al., 2001). Le paramètre d'aspect  $\Gamma$  affecte fortement le seuil de déclenchement de la première instabilité. En effet, la diminution du rapport  $\Gamma$  permet de décaler le régime TVF et donc augmenter la valeur du  $T_{ac}$  (Coles, 1976). Ce paramètre intervient aussi au niveau du régime WVF où sa diminution entraîne une diminution du nombre de rouleaux (longueur d'onde axiale) (Xiao et al., 2002).

A ces facteurs géométriques, s'ajoutent d'autres types de facteurs tels que les facteurs thermiques, un gradient de température au niveau du cylindre externe ou interne peut entraîner une déstabilisation de l'écoulement (Coney, 1979) et même une modification de la structure des rouleaux caractéristiques de Taylor.

On peut aussi noter l'effet de la viscosité qui a tendance à stabiliser l'écoulement ou encore l'effet de la superposition d'un écoulement radial ou axial. L'écoulement obtenu est connu sous le nom de « l'écoulement de Couette-Taylor Poiseuille ».

## **2.3 Méthodes électrochimiques**

### **2.3.1 Introduction**

Dans cette partie, nous essayerons de présenter un moyen permettant d'exploiter les mécanismes d'interaction entre les instabilités et les parois qui les entourent et qui confinent l'écoulement. Dans cette optique, nous utiliserons la technique de polarographie, qui est une méthode électrochimique ou électro-diffusionnelle permettant de mesurer le gradient de vitesse pariétal. Cette méthode, non intrusive, s'intéresse à l'aspect électro-diffusionnel de la matière, et plus précisément à la réaction d'oxydo-réduction d'une espèce chimique à la surface d'une microélectrode affleurant une paroi solide inerte de l'écoulement. En appliquant un certain potentiel électrique, le courant électrique qui est généré est dépendant de la concentration des réactifs et du transfert de masse. La mesure du transfert de masse permettra de remonter à la mesure du gradient pariétal de vitesse et ainsi d'identifier l'empreinte d'un tourbillon sur une paroi.

Nous consacrerons cette partie, tout d'abord, à la présentation de la méthode polarographique et les différents outils qu'elle met en jeu. Par la suite, nous expliciterons la démarche à suivre en utilisant cette méthode afin de déterminer convenablement le gradient pariétal de vitesse.

### **2.3.2 Etat de l'art de la méthode polarographique**

#### **2.3.3.1 Principe de la méthode**

La méthode polarographique représente un outil expérimental performant permettant de mesurer le gradient pariétal de vitesse. Mais à ses débuts, cette méthode n'était pas formellement destinée à cet objectif.

Fondées sur les mécanismes de transport ioniques des couples redox au début du 20<sup>ème</sup> siècle, la méthode électrochimique (ou polarographique) était généralement utilisée dans le domaine de la chimie. Une dizaine d'années après, et plus précisément en 1922, un chimiste Tchèque nommé Heyrovsky, a repris les travaux fondateurs de Nernst (1904). En se basant sur les propriétés diffusionnelles des couples oxydo-reducteurs et le mécanisme de transfert massique, il a mis au point une nouvelle méthode dite méthode polarographique basée sur les tracés des courbes intensité-potentiel aux bornes d'une cellule à électrolyse. Dans la littérature, plusieurs auteurs se sont intéressés par la suite à cette méthode, et ont essayé de la développer et d'élargir son champ d'applications (Putnam, 1951 ; Reiss et Hanratty , 1962 ; Cognet, 1968 ; Lebouché, 1968 ; Souhar 1982 ; Sobolik et al., 1987 ; Aloui 1994, etc.). Son historique a été bien détaillée par Cognet (1968); Lebouché (1968); Souhar (1982), Hanratty (1983), Aloui 1994, etc.

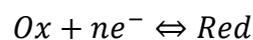
En 1962, Reiss et Hanratty ont proposé d'utiliser la polarographie à des fins autres que chimiques. En effet, dans leurs travaux, ils expliquent l'utilisation de la méthode polarographique comme

moyen de mesure du transfert de matière local en proche paroi à l'aide de microélectrodes affleurant les parois d'un cylindre (en matière inerte) ; ce qui permet par la suite de remonter au gradient pariétal de vitesse.

Le principe de cette méthode consiste à placer des cellules polarographiques constituées par un système de microélectrode et contre-électrode (anode) séparées par un électrolyte.

L'électrode qui joue le rôle de la cathode, terrain d'une réaction chimique à cinétique rapide, est de taille très petite par rapport à la contre électrode (anode). En effet, l'électrode doit avoir une taille plus petite que les échelles de turbulence de l'écoulement, afin d'avoir un écoulement uniforme à sa surface et obtenir ainsi une mesure locale correcte du transfert massique (Rehimi, 2006). Le schéma (Fig.2.19) illustre bien le principe de la méthode polarographique.

La réaction d'oxydo-réduction d'un couple (Ox / Red) à la surface de l'électrode s'écrit :



Selon la loi de Nernst, l'électrode acquiert un potentiel électrique d'équilibre  $E_q$  défini par :

$$E_q = E_0 + \frac{RT}{nF} \ln \left( \frac{C_{ox}}{C_{red}} \right) \quad (2.20)$$

avec  $E_0$  est le potentiel normal du couple redox,  $n$  est le nombre d'électrons mis en jeu,  $R$  est la constante des gaz parfaits,  $T$  (K) est la température de la solution et  $F$  la constante de Faraday.

En circuit fermé entre l'anode et la cathode, et en appliquant une tension sur cette cellule, l'équilibre est déplacé et un courant électrique  $I$  est alors généré au niveau des électrodes devenues polarisées. Ce courant croît en fonction de la tension de polarisation, mais à une certaine valeur seuil de la tension il devient constant. On obtient alors un palier de courant en fonction de la tension de polarisation : c'est le courant limite de diffusion. A ce stade, et pour une réaction chimique suffisamment rapide au niveau de l'électrode, le courant devient lié au transfert de masse uniquement par le biais des phénomènes de convection-diffusion des espèces. Selon Lingane (1952), si une réaction électrochimique est très rapide, la concentration des espèces au niveau des électrodes devient pratiquement nulle à partir d'un certain potentiel appliqué à celles-ci. Autrement dit, pour une cinétique rapide de la réaction, le courant limite de diffusion sur l'électrode est la résultante de la migration des ions, suite à la diffusion massique due aux gradients de concentration et au transport convectif généré par le mouvement du fluide. Cependant, la convection naturelle est supposée négligeable.

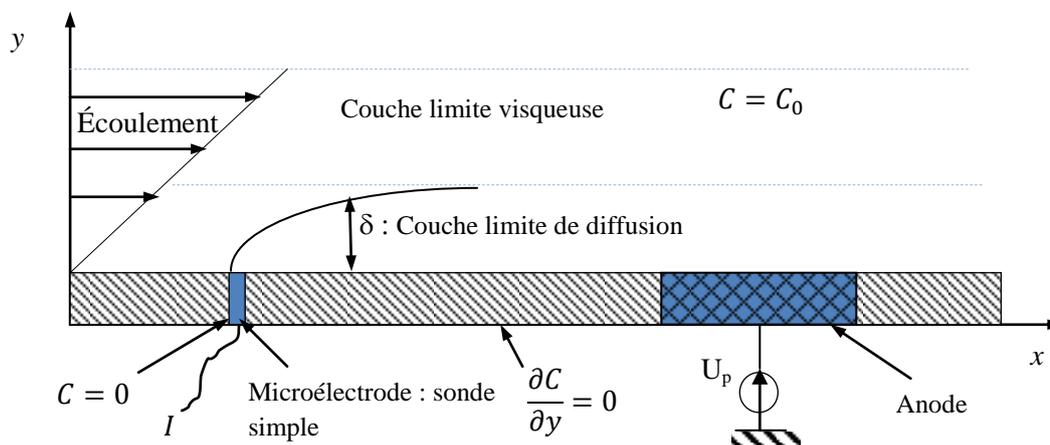
Le coefficient de transfert de masse s'écrit en fonction du courant limite de diffusion, selon la relation suivante :

$$K = \frac{I}{nFA_s C_0} \quad (2.27)$$

où  $n$  est le nombre d'électrons mis en jeu,  $F$  est la constante de Faraday,  $A_s$  est la surface active de l'électrode et  $C_0$  est la concentration de l'espèce active loin de l'électrode.

Dans la pratique, un excès d'électrolyte inerte est ajouté à la solution afin de limiter l'effet de la migration de l'ion actif.

Cependant, il est important de noter que la température de la solution doit être constante afin de s'assurer d'une densité, viscosité et coefficient de diffusion constants.



**Figure 2.19** : Principe de la méthode polarographique

Les détails de la détermination du gradient de vitesse seront présentés et explicités dans une partie suivante.

### 2.3.3.2 Solution polarographique

L'utilisation de la méthode polarographique repose sur certains éléments, dont leur choix doit être bien adapté afin d'obtenir des résultats précis. Parmi ces éléments, la solution polarographique dont le choix est primordial puisque la réaction doit être rapide et les couples redox doivent être stables et peu sensibles à la lumière.

Plusieurs types de solutions sont utilisées dans la pratique, faisant intervenir différents couples redox tels que le  $H_2/OH^-$  ou le  $H_3O^+/H_2$  ou encore le couple iodure-triiodure qui est stable mais se décompose dans la lumière naturelle.

Dans la plupart des cas de métrologie pariétale, l'utilisation du couple ferri-ferrocyanure de potassium  $Fe(CN)_6^{3-}/Fe(CN)_6^{4-}$  est fortement suggérée (Mitchell et Hanratty (1966) et Lebouché (1968)), vu sa stabilité et sa faible sensibilité à la lumière. Par ailleurs, l'ajout d'un électrolyte inerte dans la solution polarographique est indispensable vu son rôle dans l'inhibition des courants parasites dus à la migration ionique. Toutefois, il doit être chimiquement inerte et non toxique. Divers électrolytes sont utilisés dans la pratique tels que l'hydroxyde de sodium NaOH fréquemment utilisé dans les solutions de ferri-ferrocyanure de potassium (Cognet (1968)) ou

encore le chlorure de potassium. Cependant, ces électrolytes posent généralement des problèmes de corrosion. D'où l'utilisation en général de l'électrolyte  $K_2SO_4$  (Sobolik et al., 1991).

### **2.3.3.3 Sondes polarographiques**

Les électrodes ou sondes polarographiques utilisées sont généralement conçues en Nickel ou en matériau noble tel que le platine dans le cas d'un couple oxydo-réducteur comme le ferri-ferrocyanure de potassium. On trouve ces sondes sous diverses formes géométriques : circulaires, rectangulaires, simples doubles ou triples.

#### **Sondes simples**

Elles sont caractérisées par leur simple mise en place au niveau du dispositif de génération de l'écoulement. D'où leur fréquente utilisation. Rectangulaire ou circulaire, ces microélectrodes permettent de mesurer le module du gradient pariétal de vitesse.

#### **Sondes doubles**

Les sondes doubles (ou encore appelées bi-segmentées), sont constituées de deux segments métalliques (matériau noble) isolés, polarisés au même potentiel. L'utilisation de ce type de sonde permet, outre la mesure du gradient pariétal de vitesse, la détermination de la direction de l'écoulement au niveau de la zone pariétale. Le principe de l'utilisation de ces sondes est basé sur la comparaison des deux courants issus des deux segments.

Wein (2006) a proposé de considérer le courant de diffusion récupéré par la sonde double comme étant la différence entre les courants des électrodes aval et amont sous l'hypothèse d'une épaisseur séparant les deux segments comme étant nulle.

La direction de l'écoulement est déterminée par les mesures de l'angle entre l'écoulement et la frontière isolante de la sonde. Cependant, si l'écoulement est perpendiculaire, leur réponse peut être erronée. D'où un autre type de sonde, les sondes triples ou tri-segmentée, qui sont alors employées afin de remédier d'une part à ce défaut et d'autre part pour la détermination des deux composantes du gradient pariétal de vitesse sur le plan de la paroi.

#### **Sondes triples**

Les sondes triples ou tri-segmentées, fréquemment utilisées pour la détermination du sens de l'écoulement, sont constituées comme leur nom l'indique, de 3 segments isolés faisant un angle de  $120^\circ$  l'un par rapport à l'autre.

Une sonde triple est dite « idéale » si les contours des secteurs sont parfaitement idéaux et les frontières isolantes sont négligeables. Cette notion a été introduite initialement par Sobolik (1990). Dans ce cas, la direction de l'écoulement peut être déterminée à partir des ratios des courants limites

de diffusion, issus de la sonde triple (Wein et Sobolik, 1987). La valeur absolue du gradient pariétal de vitesse peut être déterminée à partir de la somme des trois courants limites de diffusion issus de la sonde triple. Les caractéristiques directionnelles permettent de décomposer le gradient pariétal de vitesse afin d'obtenir ses deux composantes axiale et azimutale (Berrich, 2011).



**Figure 2.20** : Vue d'ensemble d'une sonde triple : a) Idéale ; b) sonde triple réelle utilisée dans notre dispositif (Berrich, 2011)

### **Contre-électrode ou anode**

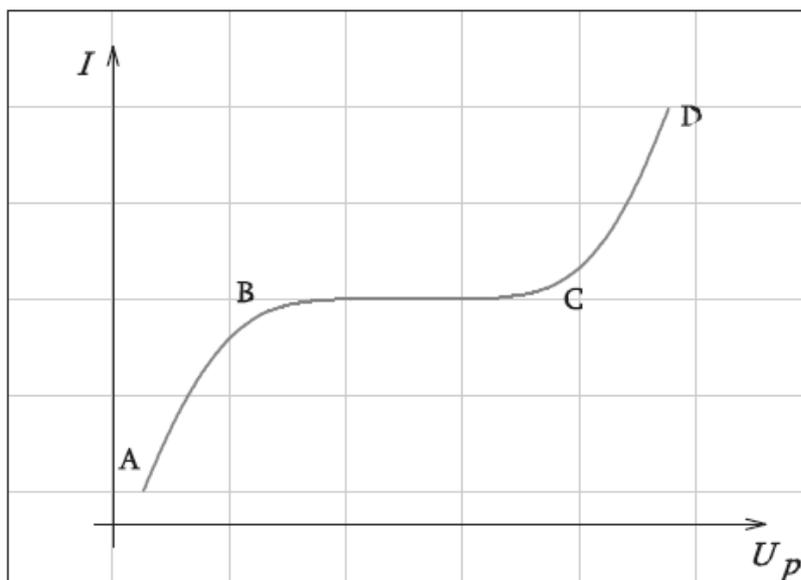
L'anode est une électrode dont la surface est beaucoup plus grande par rapport à celle des sondes polarographiques. Dans la pratique, l'anode est généralement sous forme d'une feuille de platine ou de Nickel, affleurant la solution polarographique dans la zone de mesure. Pour ne pas limiter le transfert de masse lors de la réaction électrochimique, la taille (surface) de cette contre-électrode doit être au moins 1000 fois plus importante que celle de la microélectrode.

#### **2.3.3.4 Tension de polarisation**

En imposant un potentiel de tension (tension de polarisation  $U_p$ ), un courant électrique est créé suite à une réaction de réduction au niveau de l'électrode et une réaction inverse se produit sur la contre électrode. On note alors par polarogramme comme étant le tracé de l'évolution du courant délivré par une cellule électrochimique en fonction de la tension de polarisation  $U_p$ . (Figure.2.21).

On notera en observant ce type d'évolution, trois types de phases. Une première phase débute pour des faibles tensions de polarisation où le courant délivré croît avec la tension. Dans ce cas, la cinétique de la réaction est limitée par rapport au transfert de masse et la concentration de l'oxydant est non nulle à la surface de la sonde. En augmentant progressivement la tension de polarisation, le courant devient constant en fonction de  $U_p$ . Dans ce cas, le taux de réaction devient indépendant de la cinétique chimique, et la concentration devient nulle à la surface de la sonde. La valeur du courant est alors contrôlée par la diffusion. Ce palier représente ainsi les conditions opératoires d'une cellule électrochimique.

Si on continue à augmenter la tension de polarisation  $U_p$ , on assistera à une augmentation brusque du courant qui est dû à des réactions additionnelles comme l'électrolyse d'eau.



**Figure 2.21** : Courbe d'évolution du courant de diffusion en fonction de la tension de polarisation : polarogramme

### 2.3.3 Détermination du gradient pariétal de vitesse

On traitera dans cette partie les différentes démarches à suivre afin de remonter au gradient pariétal de vitesse à partir de la réponse des sondes polarographiques.

#### 2.3.3.1 Équations du problème

Les mesures polarographiques nous fournissent un courant limite de diffusion fonction d'un coefficient de diffusion. Il faut alors établir une relation liant ce flux de diffusion au gradient pariétal de vitesse. Le calcul du flux de diffusion est basé sur la détermination du champ de concentration, qui est régi par l'équation de convection diffusion :

$$\partial_t C + \vec{U} \nabla C = D \nabla^2 C \quad (2.21)$$

avec  $C$  est la concentration des espèces actives,  $U$  le vecteur vitesse est  $D$  le coefficient de diffusion moléculaire de la solution électrochimique.

On considère une configuration bidimensionnelle d'un écoulement incompressible au voisinage de l'électrode (de très faible largeur). L'équation (2.28) s'écrit alors :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_x \frac{\partial C}{\partial x} + U_y \frac{\partial C}{\partial y} = D \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right] \quad (2.22)$$

où  $x$  est l'abscisse dans la direction de l'écoulement moyen,  $y$  la distance par rapport à la paroi (transversale à l'écoulement),  $U_x$  et  $U_y$  sont les composantes de la vitesse respectivement selon les directions  $x$  et  $y$ .

Les conditions aux limites associées au problème s'écrivent ainsi :

La concentration sur la sonde est nulle :  $C = 0$  pour  $0 \leq x \leq l$  où  $l$  est la largeur de la sonde

Loin de la sonde :  $C = C_0$

Sur la paroi inerte, on a donc un gradient de concentration nul :  $\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{y=0}$

Afin d'évaluer le rapport entre les forces visqueuses et la diffusion massique, on définit un nombre adimensionnel  $Sc$ : c'est le nombre de Schmidt, défini tel que :

$$Sc = \frac{\nu}{D} \quad (2.23)$$

Dans cette zone d'étude qui est proche de la sonde, la couche limite visqueuse est prédominante alors que couche limite massique est très petite ; ce qui se traduit par un nombre de Schmidt très supérieur à 1. Dans ce cas de configuration, la composante radiale de vitesse évolue linéairement en fonction de la distance par rapport à la paroi  $y$ .

En tenant compte de l'hypothèse d'une taille des sondes très réduite (inférieure à la longueur d'onde des plus petites perturbations de l'écoulement), le champ de vitesse peut s'écrire sous la forme :

$$U_x(y) = S(x, t).y \quad (2.24)$$

où  $S(x, t)$  est le gradient pariétal de vitesse, défini par :  $S(x, t) = \left(\frac{\partial U_x(y)}{\partial y}\right)_{y=0}$

Dans la couche de diffusion (ou couche massique), la composante radiale de vitesse  $U_y$  étant négligeable. Sa variation par rapport à la distance  $y$  peut être déterminée à partir de l'équation de conservation de la masse (ou de continuité)  $div \vec{U} = 0$  dans le cas d'un écoulement incompressible.

$$\frac{\partial U_y}{\partial y} = -\frac{\partial U_x}{\partial x} = -\frac{\partial(S(x, t)y)}{\partial x} \quad \text{d'où : } U_y = -\frac{y}{2} \frac{\partial S}{\partial x} \quad (2.25)$$

Ainsi, l'équation de convection-diffusion s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + S(x, t).y. \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} = D \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right] \quad (2.26)$$

L'équation (2.33) peut s'écrire sous une forme adimensionnelle en adoptant le changement de variable suivant :

$$C^* = \frac{C}{C_0} \quad S^* = \frac{S}{\bar{S}} \quad x^* = \frac{x}{l} \quad y^* = \frac{y}{\delta_c} \quad \delta_c = \left(\frac{lD}{\bar{S}}\right)^{1/3} \quad t^* = t \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

avec  $\bar{S}$  est le gradient pariétal homogène ( $=S_0$ ) et  $\delta_c$  l'épaisseur de la couche limite de concentration.

En considérant la composante de vitesse radiale  $U_y$  négligeable, l'équation (2.26) devient :

$$\frac{\omega l^2}{2\pi D} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{l^2 S_o}{D} \times \left( \frac{D}{S_o \cdot l^2} \right)^{1/3} \times S^* y^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^{*2}} + \left( \frac{l}{\delta_c} \right)^2 \frac{\partial^2 C^*}{\partial y^{*2}} \quad (2.27)$$

La mise sous forme adimensionnelle du temps avec  $t^* = t \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)$  aurait un sens, seulement dans le cas où  $\omega$  est une pulsation caractéristique de l'écoulement ou dans le cas où une seule fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  caractérise le gradient pariétal de vitesse.

Cette écriture adimensionnelle fait apparaître le nombre sans dimension de Peclet qui représente le rapport entre deux temps de transfert : le transfert par convection et le transfert par diffusion massique  $Pe = \frac{\bar{S} l^2}{D}$ . On fait apparaître aussi une fréquence ou une pulsation adimensionnelle  $\omega^*$  définie par :  $\omega^* = \frac{\omega \cdot l^2}{2\pi D} = \frac{f \cdot l^2}{D}$

Dans ces conditions, l'équation (2.27) devient sous la forme :

$$\omega^* \cdot Pe^{-2/3} \cdot \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + S^* \cdot y^* \cdot \frac{\partial C^*}{\partial x^*} = Pe^{-2/3} \cdot \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial y^{*2}} \quad (2.28)$$

### 2.3.3.2 Réponse des sondes polarographiques en régime permanent

En considérant l'équation adimensionnelle précédente et en adoptant les hypothèses proposées par Mitchell et Hanratty (1966) :

- Écoulement permanent :  $\frac{\partial C^*}{\partial t^*} = 0$
- Gradient de vitesse pariétal homogène sur la surface de la sonde :  $S(x, t) = \bar{S} = S_o$
- Diffusion axiale négligeable :  $\frac{\partial^2 C^*}{\partial x^{*2}} \ll \frac{\partial^2 C^*}{\partial y^{*2}}$

Dans ces conditions, l'équation (2.28) s'écrit alors :

$$S^* y^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 C^*}{\partial y^{*2}} \quad (2.29)$$

Reiss et Hunratty (1962), ensuite Mitchell et Hunratty (1966) ont résolu cette équation afin d'obtenir le profil de concentration. La solution obtenue fait intervenir le nombre de Sherwood qui exprime le flux de masse adimensionnel réduit par la cathode (rectangulaire simple de largeur  $l$ ) :

$$Sh(t) = \frac{1}{c_o} \int_0^l \left( \frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot dx$$

Ce nombre adimensionnel s'écrit aussi en fonction du coefficient de transfert massique  $K$  (2.27) :

$$\bar{Sh} = \frac{l}{D} K = \frac{l}{n F A_s C_o} \frac{l}{D} \quad (2.30)$$

La solution analytique connue sous le nom de "solution de Lévêque" (1928) s'écrit alors :

$$\overline{Sh} = 0,807 Pe^{1/3} = 0,807 \left( \frac{\bar{S} \cdot l^2}{D} \right)^{1/3} \quad (2.31)$$

Pour une sonde rectangulaire simple en régime stationnaire, le courant limite de diffusion s'écrit alors :

$$I = 0,807 \times nFA_s C_0 \frac{D}{l} \left( \frac{\bar{S} \cdot l^2}{D} \right)^{1/3} \quad (2.32)$$

Ainsi, le gradient pariétal de vitesse s'exprime :

$$\bar{S} = \left( \frac{I}{0,807 \times nFA_s C_0} \right)^3 \times \frac{l}{D^2} \quad (2.33)$$

Dans le cas des sondes circulaires simples, Reiss et Hanratty (1962) constatent que le diamètre de la sonde  $d_s$  peut être assimilé, en régime stationnaire, à la largeur d'une sonde simple  $l_e = 0,81356 d_s$ . Py et Gosse (1969) ont montré que l'évolution du nombre de Sherwood en fonction du nombre de Peclet d'une sonde circulaire est similaire à celui d'une sonde rectangulaire.

Néanmoins, ce type de sondes circulaires est le plus fréquemment utilisé dans la pratique, vu leur aspect compact et leur facilité de mise en place.

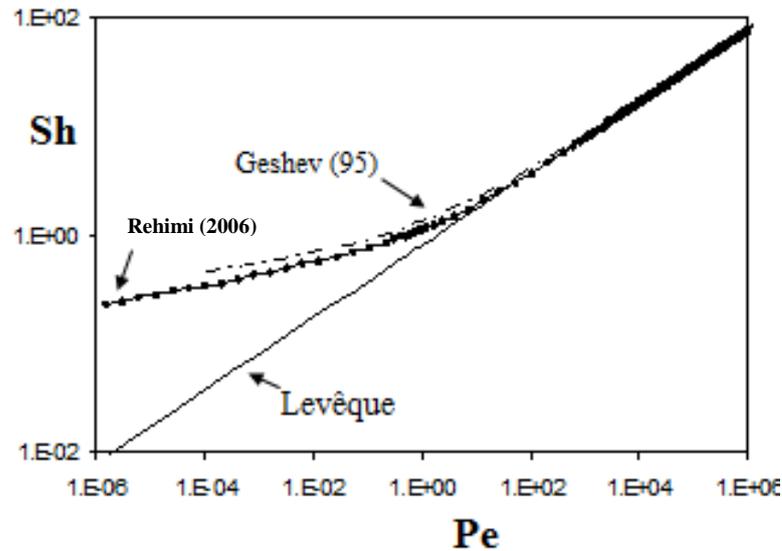
Ling et al. (1962) ont constaté que pour des nombres de Peclet moyens relativement faibles ( $1 \leq \overline{Pe} \leq 1000$ ), la diffusion axiale n'est plus négligeable. C'est pourquoi, ils ont ajouté à la solution de Lévêque (2.38) un terme correctif relatif à la diffusion axiale :

$$\overline{Sh} = 0,807 Pe^{1/3} + 0,19 Pe^{-1/6} \quad (2.34)$$

Plusieurs autres auteurs se sont intéressés par la suite à l'évolution du nombre de Sherwood en fonction du nombre de Peclet en régime permanent. Cognet (1968), Py et Gosse (1969). Labbé et Lebouché (1975) ont résolu l'équation de convection-diffusion en utilisant la méthode des différences finies pour des nombres de Peclet voisins de 1.

Geshev (1995) a résolu lui aussi par la suite l'équation de convection-diffusion en se basant sur un calcul numérique de la fonction de Green. Il a constaté que pour des  $Pe > 7000$  l'écart de la courbe  $\overline{Sh} = f(\overline{Pe})$  par rapport à la courbe de Levêque reste inférieur à 0,5% et pour des nombres de Peclet  $Pe \ll 1$ , l'écart demeure inférieur à 0,2% par rapport à la solution analytique d'Ackberg et al. (1978).

Rehimi (2006) a résolu l'équation de convection-diffusion en deux-dimensions en utilisant la méthode des volumes finis (approche implicite) et un maillage structuré et à pas variable dans le cas d'une sonde simple rectangulaire. Il a constaté alors que la diffusion axiale devient négligeable à partir d'un nombre de Peclet supérieur à 100 et non plus 1000 (Figure 2.22).



**Figure 2.22** : Courbe d'évolution du nombre de Sherwood en fonction du nombre de Peclet en régime permanent pour une sonde simple (Rehimi, 2006)

Dans le cas d'une sonde double (utilisée généralement pour déterminer le sens de l'écoulement), l'une des deux microélectrodes va se trouver dans le sillage de l'autre. En effet, selon le sens de l'écoulement, le flux sur la première sonde est plus important que celui de la sonde qui suit. Py et Gosse (1969) ont déterminé les nombres de Sherwood relatifs à deux sondes simples rectangulaires séparées par une épaisseur  $e$  infiniment mince, et ont obtenu :

$$\overline{Sh}_1 - \overline{Sh}_2 = 0,210Pe^{1/3} \quad (2.35)$$

où :  $\overline{Sh}_i = \frac{I_i}{nFC_oAD} \frac{l}{D}$  et  $i = 1$  ou  $2$

$$Pe = S \frac{(2l)^2}{D}$$

Py et Gosse (1969) ont traité numériquement le cas des sondes circulaires doubles. Ils ont ainsi évalué le flux massique au niveau des sondes en fonction de l'angle que fait l'espace isolant avec la direction de l'écoulement.

### 2.3.3.3 Réponse des sondes polarographiques en régime instationnaire

La solution de Levêque n'est valable que dans le cas des écoulements stationnaires. Cependant, dans la pratique les problèmes traités sont dans la plus part des cas instationnaires. Afin de remonter au gradient pariétal de vitesse à partir mesures de transfert de masse issues de ces sondes polarographiques, trois méthodes (basées sur une solution linéaire) peuvent être utilisées : la solution quasi-stationnaire, les fonctions de transfert et la solution de Sobolik et al.(1987).

Les hypothèses d'une diffusion axiale négligeable et d'un gradient pariétal homogènes sont conservées pour ces trois types de ces démarches.

Toutes ces méthodes négligent la diffusion axiale du transfert de masse et se placent dans le cas d'un gradient pariétal de vitesse homogène. Le problème revient donc à résoudre l'équation (2.28).

### 2.3.3.3.1 Méthode quasi-stationnaire

Dans l'hypothèse d'un écoulement stationnaire en moyenne, on peut appliquer la décomposition de Reynolds des grandeurs en termes moyens et termes fluctuants sous la forme :  $A(t) = \bar{A} + a(t)$ . La méthode quasi-stationnaire est en fait une extension de la solution de Levêque (1928) du régime stationnaire, qui s'écrit :

$$Sh(t) = 0,807 Pe(t)^{1/3} = 0,807 \left( \frac{S(t)l^2}{D} \right)^{1/3} \quad (2.36)$$

Le gradient pariétal de vitesse est donc obtenu par :

$$S(t) = \frac{D}{l^2} \left( \frac{Sh(t)}{0,807} \right)^3 \quad (2.37)$$

En passant par la décomposition de Reynolds des différentes grandeurs  $Sh(t)$ ,  $K(t)$  et  $S(t)$ , Mitchell et Hanratty (1966) ont effectué un développement en série de Taylor pour un rapport  $s(t)/\bar{S}$  suffisamment faible. Ils ont obtenu les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{Sh} &= \frac{\bar{K}l}{D} = 0,807 \bar{Pe}^{1/3} \left( 1 - \frac{1}{9} \frac{\overline{s(t)^2}}{\bar{S}^2} + \dots \right) \\ \frac{sh(t)}{\bar{Sh}} &= \frac{k(t)}{\bar{K}} = \frac{1}{3} \frac{s(t)}{\bar{S}} - \frac{1}{9} \left( \frac{s^2}{\bar{S}^2} - \frac{\bar{S}^2}{\bar{S}^2} + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Cette approche reste limitée au domaine de basse fréquences adimensionnelles et diffusion axiale négligeable, donc pour des nombres de Peclet moyens élevés.

### 2.3.3.3.2 Méthode de Sobolik et al. (1987)

Lorsque l'hypothèse de basses fréquences ne devient plus valide, la solution quasi-stationnaire n'est plus applicable. Pour ce faire, Sobolik et al. (1987) ont proposé une correction de la solution quasi-stationnaire en se basant sur la réponse des sondes polarographiques en régime transitoire. Le gradient pariétal de vitesse obtenu s'écrit alors sous la forme :

$$S_{sob}(t) = S_q(t) + \frac{2}{3} \theta(t) \left( \frac{\partial S_q(t)}{\partial t} \right) \approx S_q(t) + 1,204 \frac{\partial Sh(t)}{\partial t} \quad (2.39)$$

où  $S_q(t)$  est la solution de Levêque quasi-stationnaire  $S_q(t) = S_{Lev}(t) = \frac{D}{l^2} \left( \frac{Sh(t)}{0,807} \right)^3$

$$\theta = \left( \frac{\alpha_{cot}}{l} \right)^2 \quad (2.40)$$

$\alpha_{cot}$  est la pente de Cotrell :

$$\alpha_{cot} = nFC_oA \left(\frac{D}{\pi}\right)^{1/2} \quad (2.41)$$

D'où, en remplaçant  $\alpha_{cot}$  par son expression (2.41) on obtient :

$$\theta(t) = 0,486 l^{2/3} D^{-1/3} S_q(t)^{-2/3} \quad (2.42)$$

Dans ces travaux numériques sur le transfert de masse, Rehim (2006) a étudié en détail la méthode de Sobolik et al. (1987) pour le cas d'une sonde simple rectangulaire et une sonde simple circulaire ( $l = 0.82 d_c$ ). Il a ainsi souligné différents avantages de cette méthode, tels que sa facilité d'implémentation et sa validité pour des nombre de Peclet élevés. Cependant, cette méthode reste sensible au bruit et à la qualité de l'échantillonnage.

### 2.3.3.3 Fonctions de transfert

Dans le cas d'un écoulement riche en instabilités ou un écoulement turbulent, les méthodes quasi-stationnaires ne deviennent plus valables. Afin de remédier à ce problème, on fait généralement recours souvent à des fonctions de transfert.

En effet, pour des faibles taux de fluctuations, l'équation de convection-diffusion est linéarisable et une fonction de transfert  $H$  est alors introduite, liant la densité spectrale des fluctuations du gradient pariétal de vitesse à celle du courant limite de diffusion mesuré. Plusieurs auteurs se sont penchés sur la détermination de ces fonctions de transfert, parmi lesquels on peut citer chronologiquement Lebouché (1968), Fortuna et Hanratty (1971), Dumaine (1981), Vorotyntsev et al (1984), Ambari et al. (1986), Nakoryakov (1986) et Deslouis et al. (1990).

On peut alors classer ces différents travaux en deux catégories : Approches basées sur des développements analytiques et approches numériques basées sur des intégrations numériques ou par la résolution numérique de l'équation de convection-diffusion.

#### a- Approche analytique

Il s'agit dans ce cas de linéariser l'équation de convection-diffusion en considérant des faibles fluctuations (Hanratty et al. (1966 et 1971) en écrivant le gradient pariétal de vitesse sous la forme  $S(t) = \bar{S} + Re(\tilde{s}e^{i\omega t})$  et un champ de concentration  $C(t) = \bar{C} + Re(\tilde{c}e^{i\omega t})$

L'équation de convection-diffusion (diffusion axiale négligée) sera alors scindée en deux parties : une partie gouvernant l'écoulement moyen admettant comme solution celle de Lévêque (1928), et deuxième partie fluctuante gouvernant le transfert instationnaire.

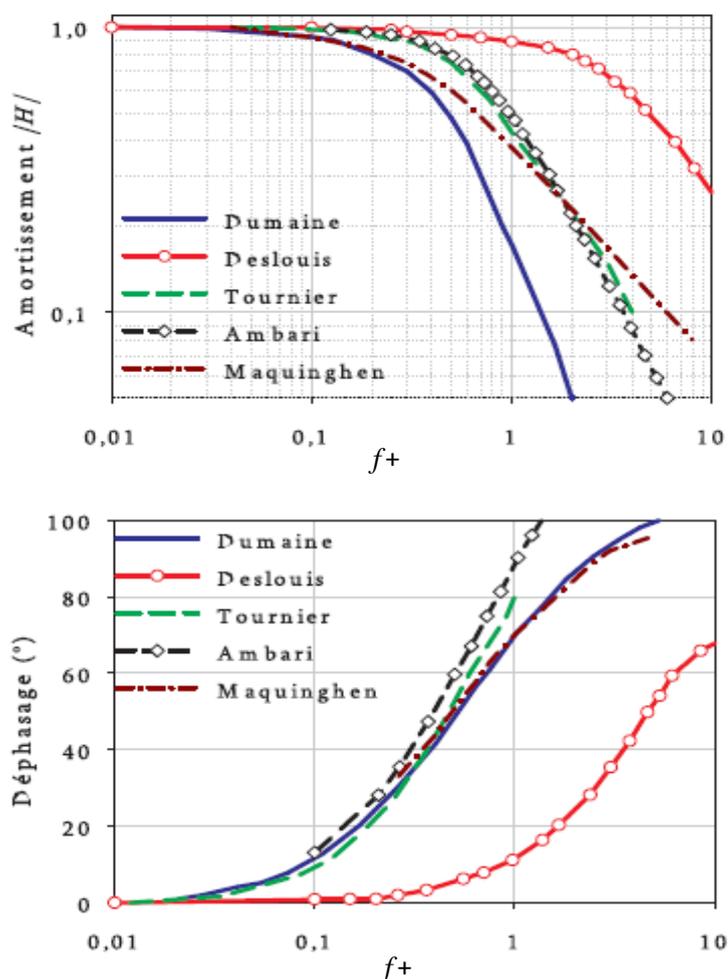
Mitchell et Hanratty (1966) ont établi alors un coefficient d'amortissement du transfert massique  $A$  qui est fonction de la fréquence d'excitation sinusoïdale  $f$  du gradient pariétal de vitesse.

$$A^2 = \frac{|\tilde{k}|^2}{k_s^2} = \frac{1}{1 + 0,06 \left( \frac{2\pi f l^{2/3}}{D^{1/3} \bar{S}^{2/3}} \right)} \quad (2.43)$$

où  $k_s$  est la réponse de la sonde en régime quasi-stationnaire et  $\tilde{k}$  est la fluctuation

### b- Approche numérique

Plusieurs auteurs se sont intéressés au calcul numérique de la fonction de transfert au moyen de la résolution de l'équation de convection-diffusion, où l'écoulement est soumis à des excitations sinusoïdales à des fréquences connues. La figure (2.23) présente quelques exemples de résultats obtenus en termes d'amplitude  $H$  et de phase  $\Delta\phi$  en fonction de la fréquence.



**Figure 2.23** : Amplitude et phase de la fonction de transfert d'une sonde simple soumise à des fluctuations longitudinales (Zidouh, 2007)

Les résultats obtenus ne sont pas concordant, vu les différentes démarches utilisées et les hypothèses adaptées ainsi que les sondes utilisées.

Tournier et Py (1978) se sont intéressés aux sondes circulaires, ils ont calculés ainsi les fonctions de transfert en utilisant la réponse indicelle.

Dumaine (1981) a utilisé la méthode des éléments finis pour la résolution de l'équation de convection-diffusion pour des sondes rectangulaires en tenant compte de la diffusion axiale.

En 1986, Ambari et al. ont utilisé une intégration par la méthode de Newman pour le calcul des fonctions de transfert dans le cas d'une sonde rectangulaire. Leurs résultats numériques ont été suivis par des mesures expérimentales.

Deslouis et al. (1990a) ont aussi utilisé une résolution numérique accompagnée de mesures expérimentales afin de déterminer les fonctions de transfert des sondes circulaires et rectangulaires. A cet effet, ils se sont basés sur la linéarisation de l'équation de convection-diffusion en considérant un écoulement modulé de la forme :

$$\begin{cases} V_x = \bar{S}y + Re(\tilde{s}_x y e^{i\omega t}) \\ V_z = Re(\tilde{s}_z y e^{i\omega t}) \end{cases}$$

Ils ont alors obtenu une composante stationnaire qui admet comme solution celle de Lévêque (1928), et ont retrouvé les fonctions de transfert suivantes qui varient selon la plage des fréquences adimensionnelles  $\sigma_{rect}$  :

$$\text{- Si } \sigma_{rect} = 2\pi f \left( \frac{l^2}{D\bar{S}^2} \right)^{1/3} \leq 6$$

$$\left| \frac{H(\sigma_{rect})}{H(0)} \right| = (1 + 0,056\sigma_{rect}^2 + 0,00126\sigma_{rect}^4)^{-1/2} \quad (2.44)$$

$$\arg(H(\sigma_{rect})) = -\arctan(0,276\sigma_{rect}(1 + 0,02\sigma_{rect}^2 - 0,00026\sigma_{rect}^4))$$

$$\text{- Si } \sigma_{rect} = 2\pi f \left( \frac{l^2}{D\bar{S}^2} \right)^{1/3} \geq 6$$

$$\left| \frac{H(\sigma_{rect})}{H(0)} \right| = \frac{\sqrt{55,2049 + (5,64 - 7,49\sigma_{rect}^{1/2})^2}}{2\sigma_{rect}^{2/3}} \quad (2.45)$$

$$\arg(H(\sigma_{rect})) = -\arctan\left(\frac{7,43\sigma_{rect}^{1/2} - 3,99\sqrt{2}}{3,99\sqrt{2}}\right)$$

Dans le cas d'une sonde circulaire de diamètres  $d_s$ , on a :

$$\text{- Si } \sigma_{cir} = 2\pi f \left( \frac{d_s^2}{D\bar{S}^2} \right)^{1/3} \leq 6$$

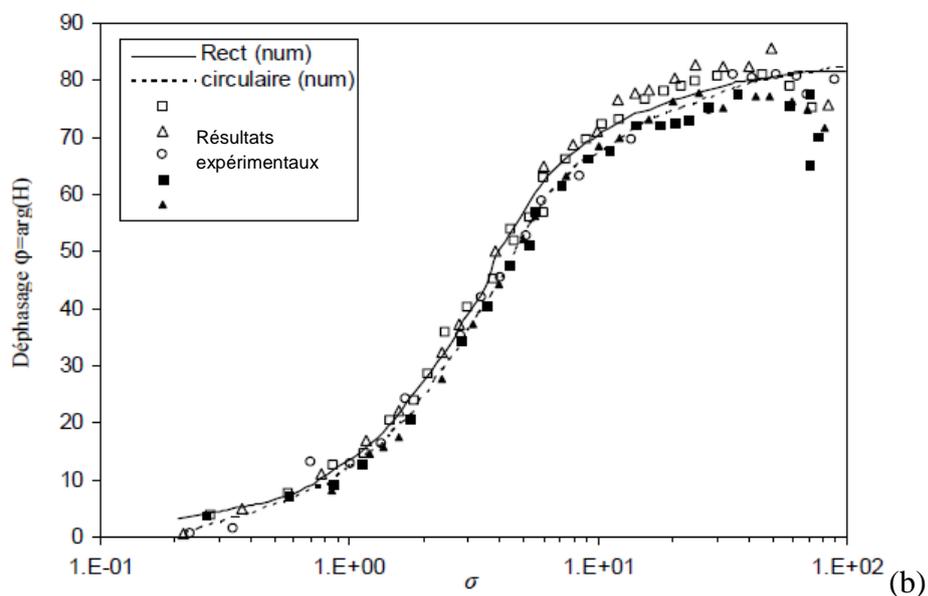
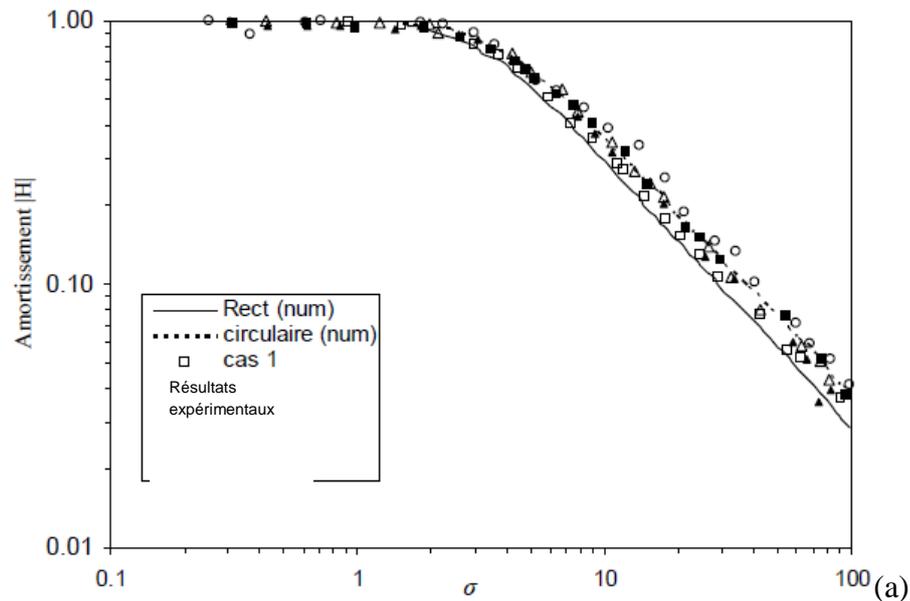
$$\left| \frac{H(\sigma_{cir})}{H(0)} \right| = (1 + 0,049\sigma_{rect}^2 + 0,0006\sigma_{cir}^4)^{-1/2} \quad (2.46)$$

$$\arg(H(\sigma_{cir})) = -\arctan(0,246\sigma_{cir}(1 + 0,0124\sigma_{cir}^2 - 0,00015\sigma_{cir}^4))$$

$$- \text{Si } \sigma_{cir} = 2\pi f \left( \frac{d_s^2}{D\bar{s}^2} \right)^{1/3} \geq 6$$

$$\left| \frac{H(\sigma_{cir})}{H(0)} \right| = \frac{\sqrt{56,18 + (7,495 - 8,832\sigma_{cir}^{1/2})^2}}{2\sigma_{rect}^{2/3}} \quad (2.47)$$

$$\arg(H(\sigma_{cir})) = -\arctan \left( \frac{7,495 - 8,832\sqrt{\sigma_{cir}}}{7,495} \right)$$



**Figure 2.24** : Amplitude et phase de la fonction de transfert d'une sonde simple (rectangulaire et circulaire) (Delouis, 1989.b)

Les fonctions de transfert obtenues par Deslouis et al. (1989a) coïncident bien d'une part avec les résultats de Nakoryakov et al. (1986), et d'autres part avec leurs résultats expérimentaux sur cinq configurations différentes. La figure (2.25) montre les résultats numériques de Deslouis (en terme

d'amplitude de la fonction de transfert et de déphase  $\Delta\phi$  pour une sonde simple circulaire), comparés aux résultats expérimentaux pour cinq configurations différentes.

Cependant, il est primordial de noter qu'en présence de fluctuations importantes, l'utilisation des fonctions de transfert ne devient plus valide. Ces constatations ont été vérifiées dans les travaux expérimentaux et numériques de Kaiping (1983) et de Funfshilling (2001). Pour remédier à ces restrictions, une quatrième méthode qui est la méthode inverse est alors fortement conseillée.

#### **2.3.3.3.4 Méthode inverse**

Pour des écoulements à faibles nombres de Peclet avec des fluctuations de grandes amplitudes, la détermination du gradient pariétal de vitesse peut être obtenue en inversant l'équation de convection-diffusion. L'usage des méthodes inverses dans l'objectif de la détermination des paramètres ou des fonctions inconnus, était initialement destiné aux problèmes de transfert thermique. Introduite par Beck et al. en 1985 dans le but de déterminer une fonction du flux de chaleur inconnue s'appliquant sur une surface à partir des mesures expérimentales de la température, la méthode inverse a été rapidement étendue aux problèmes de transfert massique par Mao et Hunratty (1990). Ils sont parvenus pour la première fois en utilisant cette technique inverse, à estimer le gradient pariétal de vitesse expérimental  $S(t)$  à partir des mesures du courant limite de diffusion en négligeant la diffusion axiale.

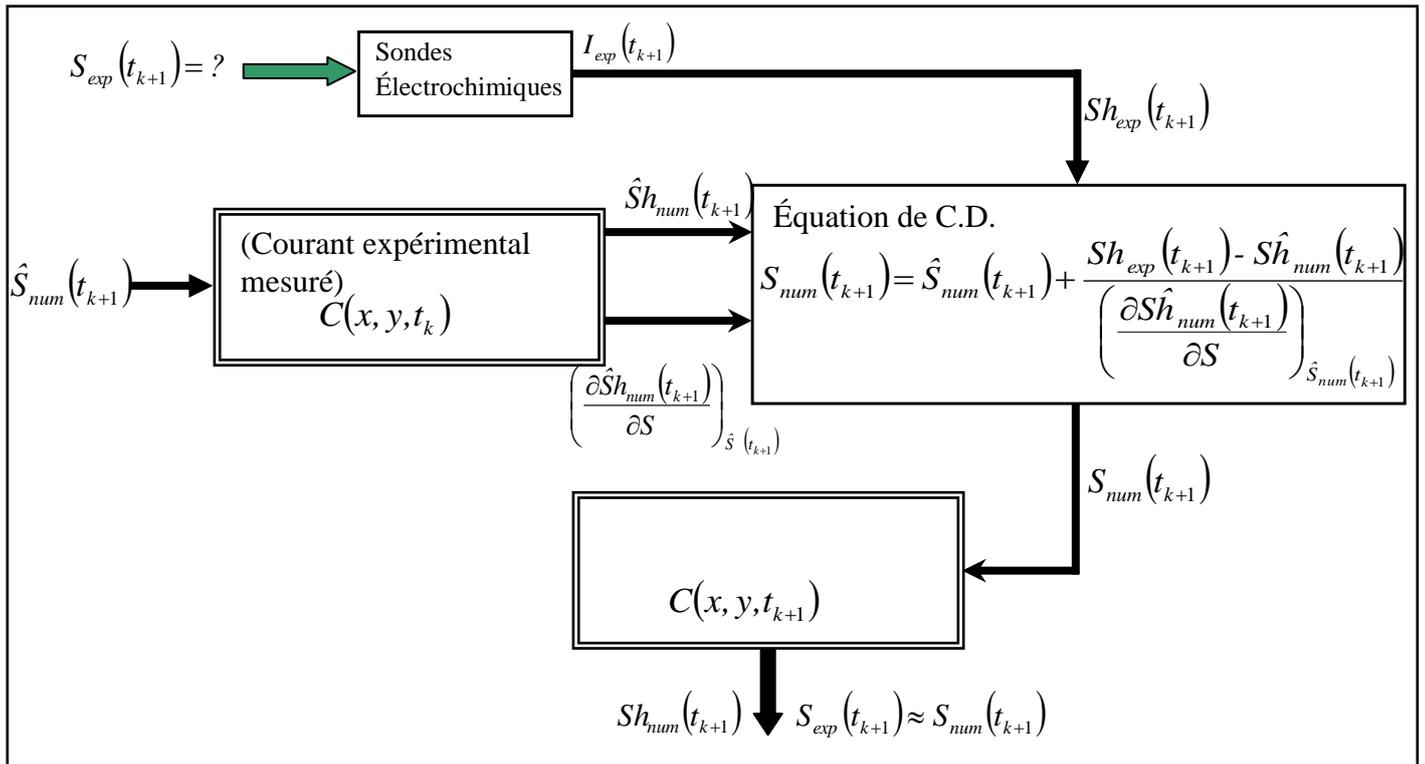
La résolution du problème inverse passe généralement par deux étapes : une première étape de modélisation du phénomène, communément appelée « problème direct ». Une seconde étape, basée sur des mesures expérimentales, servira à estimer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Puisque dans notre cas, le gradient pariétal de vitesse dépend essentiellement du temps, il s'agit donc d'effectuer une estimation séquentielle inverse basée sur une minimisation de l'écart entre le courant limite de diffusion mesuré (ou le transfert de masse mesuré représenté par le nombre de Sherwood) et celui simulé par le problème direct.

Mao et Hanratty (1990) ont utilisé cette méthode en appliquant la méthode des volumes finis pour la résolution du problème direct.

Rehimi et al. (2008) ont développé un code de calcul séquentiel pour la première fois au sein du laboratoire GEPEA, utilisant l'algorithme de Beck pour la détermination du gradient pariétal de vitesse en écoulement instationnaire en tenant compte de la diffusion axiale. Ils ont ainsi utilisé la méthode des volumes finis pour la résolution de l'équation de transfert, ensuite ils ont testé ce code sur les signaux obtenus expérimentalement à partir d'une sonde simple placée sur une paroi plane inerte et en contact avec un écoulement d'accélération progressive de type rampe dans un rhéomètre cône-plan (Rehimi, 2006).

La résolution du problème direct a permis de déterminer un champ de concentration et par la suite le nombre de Sherwood, après une intégration de l'équation :  $Sh(t) = \overline{Pe}^{1/3} \int_0^1 \frac{\partial C}{\partial y^*} \Big|_{y=0} dx^*$ .

La minimisation de l'écart entre le nombre de Sherwood obtenu numériquement du problème direct  $Sh_{num}(t)$  et le nombre de Sherwood mesuré expérimentalement  $Sh_{exp}(t)$ , permet en effet de remonter directement au gradient pariétal de vitesse local et instantané. Pour ce faire, l'algorithme séquentiel développé par Réhimi et al. (2008), et basé sur la procédure séquentielle de Beck pourrait être utilisé (Fig.2.25).



**Figure 2.25 :** Organigramme de l'algorithme séquentiel mis en place par Réhimi et al. (2008)

Cet algorithme consiste à considérer une estimation séquentielle du gradient pariétal de vitesse expérimental  $S_{exp}(t_i)$  connue sur une durée  $0 \leq t_i \leq t_k$ . La détermination du gradient pariétal de vitesse à l'instant  $t_{k+1}$  se fait alors selon la relation suivante :

$$S_{num}(t_{k+1}) = S_{num}^0(t_{k+1}) + \frac{(Sh_{exp}(t_{k+1}) - Sh_{num}^0(t_{k+1}))}{\left(\frac{\partial Sh_{num}^0}{\partial S_{num}^0}\right)_{t_{k+1}}} \quad (2.48)$$

où :

$S_{num}^0(t_{k+1})$  est la valeur initiale estimée du gradient pariétal de vitesse à l'instant  $t_{k+1}$

$S_{num}(t_{k+1})$  est la valeur finale estimée du gradient pariétal de vitesse à l'instant  $t_{k+1}$

$Sh_{num}^0(t_{k+1})$  est le nombre de Sherwood calculé à partir de la valeur initiale estimée du gradient pariétal de vitesse  $S_{num}^0(t_{k+1})$  à l'instant  $t_{k+1}$

Rehimi (2006) a obtenu la quantité  $\left. \frac{\partial Sh_{num}^0}{\partial S_{num}^0} \right)_{t_{k+1}}$  en mettant en place cette équation :

$$\left( \frac{\partial Sh_{num}}{\partial S_{num}} \right)_{t_i} = \frac{(Sh_{num}(t_i, (1 + \varepsilon)S_{num}) - Sh_{num}(t_i, (1 - \varepsilon)S_{num}))}{2\varepsilon S_{num}} \quad (2.49)$$

Généralement, la valeur de  $\varepsilon$  doit être dans l'intervalle  $10^{-6} \leq \varepsilon \leq 10^{-3}$  (Beck et al., 1985) afin de pouvoir obtenir une évolution quasi-linéaire entre le  $Sh_{num}$  et  $S_{num}$ .

Cependant, il faut noter que cet algorithme fonctionne correctement pour des écoulements de non-retour selon les travaux de Mao et Hanratty (1990), mais pourrait diverger dans le cas d'un écoulement de retour lors du passage par un gradient pariétal de vitesse nul.

#### 2.3.3.4 Détermination du gradient pariétal de vitesse par la sonde triple

L'utilisation d'une sonde tri-segmentée permet de remonter aux composantes axiale et azimutale du gradient pariétal de vitesse. Sobolik (1999), a utilisé deux sondes triples verticales séparées d'un angle de  $180^\circ$  afin de déterminer les composantes du gradient pariétal pour un écoulement de «Taylor-vortex flow» stable. Pour ce faire, plusieurs rapport radiaux ont été employés  $\eta=0,95$  ;  $\eta=0,8$  ;  $\eta=0,75$  ;  $\eta=0,65$  et  $\eta=0,6$ . Un débit axial faible a été superposé à l'écoulement TVF afin de déterminer son effet sur la composante axiale du gradient pariétal de vitesse. Dans une étude ultérieure, Sobolik et al. (2011) ont explicité les composantes azimutale et axiale du gradient pariétal de vitesse pour une plage de nombres de Taylor allant de  $Ta=52$  à  $Ta=725$  pour deux rapports radiaux différents  $\eta=0,5$  et de  $\eta=0,8$ .

Au-dessus d'une valeur de critique du nombre de Taylor  $Ta^*$  (première instabilité), l'écoulement n'est plus stable et les premières instabilités apparaissent. Ces instabilités sont sous forme de tube de Taylor régulièrement espacés selon l'axe vertical. Les composantes de vitesse dans ce cas possèdent une symétrie axiale dans le système de coordonnées cylindriques, et sont indépendants de l'angle azimutal  $\theta$  et sont périodiques selon  $(z)$ .

En admettant l'hypothèse d'une couche limite de concentration de faible épaisseur, l'effet de courbure est alors négligé (Sobolik, 1999). Le tenseur du gradient de vitesse n'aurait que deux composantes non nulles : la composante azimutale  $\gamma_\theta(z) = \left. \frac{\partial v_\theta}{\partial y} \right]_{y=0}$  et la composante axiale

$\gamma_z(z) = \left. \frac{\partial v_z}{\partial y} \right]_{y=0}$ . En supposant une vitesse  $v_r$  négligeable, ces deux composantes du gradient

pariétal de vitesse peuvent être déterminées à partir des courants limites de diffusion recueillis par une sonde triple en utilisant ses caractéristiques directionnelles.

Les caractéristiques directionnelles de l'écoulement sont déterminées à partir de l'intensité de courant sur chaque segment de la sonde. Le courant limite de diffusion est plus important au niveau d'un segment amont que celui d'un segment aval. Afin de remonter au gradient pariétal de vitesse à partir du courant limite de diffusion, Kristiawana et al. (2011) ont utilisé la relation de Levêque (1928) détaillé précédemment en supposant une diffusion axiale négligeable.

Le gradient pariétal de vitesse moyen est alors calculé à partir de la somme des courants limites de diffusion des trois segments de la sonde.

Wein (2008) a considéré une projection de la sonde triple en circulaire en trois sondes simples rectangulaires de longueur différentes. Le courant total est alors calculé grâce à une intégration sur la surface totale de la sonde tri-segmentée.

Au moyen des mesures de courant limite de diffusion par la sonde tri-segmentée, Sobolik et al. (2011) ont constaté que la composante azimutale du gradient pariétal de vitesse à la paroi extérieure est indépendante du rapport radial, à l'inverse de la composante axiale qui en est fortement dépendante.

D'autre part, l'utilisation de la sonde tri-segmentée permet de déterminer le couple au niveau d'un tube de Taylor. En effet, Donnelly (1960) et Fasel (1984) ont introduit une expression adimensionnelle du couple  $G^*$  en fonction de la composante azimutale du gradient pariétal de vitesse sur la paroi du cylindre externe qui est exprimée ainsi :

$$\frac{\gamma_{\theta 2,m}}{\Omega} = G^* \frac{R_1^2}{2\pi\eta^2\mu} \quad (2.50)$$

avec  $\Omega$  est la vitesse de rotation du cylindre,  $R_1$  le rayon du cylindre interne,  $\eta$  le rapport radial et  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide.

Sobolik et al. (2011) ont vérifié expérimentalement cette expression grâce à des mesures du courant limite de diffusion par une sonde triple. Ils ont établi ainsi une nouvelle expression de la composante azimutale en fonction du nombre de Taylor, qui est sous la forme :

$$\frac{\gamma_{\theta 2,m}}{\Omega} = a.Ta^{-2} + b.Ta + c$$

où les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  dépendent des paramètres géométriques.

D'autres études ultérieures ont été menées sur la détermination des composantes axiales et azimutales du gradient pariétal de vitesse pour différents régimes d'instabilités de Couette-Taylor. Notons principalement les travaux de Wouahbi (2009) ou de Kristiawan et al. (2011) qui ont employées des sondes tri-segmentées afin d'exploiter le gradient pariétal de vitesse en régime WVF d'un écoulement de Couette-Taylor.

## 2.4 Conclusion

Cette seconde partie du chapitre bibliographique a été consacrée à la présentation de la méthode électrochimique comme moyen permettant de caractériser l’empreinte d’une instabilité lors de son passage près d’une paroi, grâce à la détermination du gradient pariétal de vitesse. Pour cela, nous avons commencé par présenter tous les éléments constitués de cet outil ; à savoir : les critères de choix de la solution polarographique, les différents types de sondes électrochimiques ou électrodes ainsi que les outils assurant le lien entre les réponses des sondes et le gradient pariétal de vitesse.

La détermination du gradient pariétal de vitesse est simple dans le cas d’un régime d’écoulement permanent et en négligeant la diffusion axiale. Par contre pour le cas instationnaire, le problème devient plus complexe. En effet, plusieurs auteurs se sont focalisés sur la question et ont déterminé des méthodes remédiant à ce problème. Ainsi, quatre méthodes ont été mises en place et employées. La méthode quasi-stationnaire est valable uniquement pour des écoulements à nombres de Peclet très élevés. La méthode de Sobolik et al. (1987) représente une correction de la méthode quasi-stationnaire. Son point fort est qu’elle n’impose aucune hypothèse sur les amplitudes des fluctuations du gradient pariétal de vitesse. Cependant, elle reste trop sensible au bruit. Une troisième méthode utilisant les fonctions de transfert et basée sur la linéarisation de l’équation de convection-diffusion est applicable pour des nombres de Peclet élevés, une diffusion axiale négligeable et des fluctuations ou perturbation très faibles (amplitudes de fluctuations inférieures à 10% comparées à la valeur moyenne).

Ces trois types de méthodes que nous venons de citer sont généralement restreintes à des forts nombres de Peclet ( $>5000$ ) avec l’hypothèse d’une diffusion axiale négligeable. Une quatrième méthode est alors disponible afin de remédier à ce problème. Il s’agit de la méthode inverse, qui est basée sur une estimation séquentielle du gradient de vitesse  $S_{exp}(t)$  par la minimisation instantanée de l’écart entre  $Sh_{num}(t)$  obtenu par la résolution de l’équation de convection diffusion et  $Sh_{exp}(t)$  mesuré. Cette méthode peut être utilisée pour des écoulements de retour ou de non retour et aussi dans le cas où la diffusion axiale est non négligeable.

La méthode électrochimique ainsi que ces différentes approches citées ci-dessus, seront utilisées par la suite afin de pouvoir caractériser le passage des instabilités au voisinage des parois dans un écoulement de Couette Taylor.

## **Conclusion sur le chapitre d'analyse bibliographique**

La méthode de Lattice Boltzmann est une alternative intéressante aux méthodes de discrétisation standards telles qu'éléments finis ou volumes finis pour les problèmes de Mécanique des fluides, de transfert de thermique et de transfert de masse. Cette méthode, dont la formulation est simplifiée et la mise en place de son algorithme est facile, sera utilisée dans notre étude pour simuler les écoulements et les transferts pariétaux, en particulier dans deux configurations géométriques présentées dans ce chapitre.

En effet, les écoulements dans ces types de géométrie (obstacle en milieu confiné et un écoulement de Couette-Taylor) ont été largement étudiés dans la littérature. Cependant, comme ils représentent des cas tests très riches en instabilités, ils restent très convoités par les chercheurs pour tester la limite de validité des codes de simulations numériques.

Pour notre travail, ces deux configurations géométriques seront exploitées pour mener des investigations expérimentales nécessaires à l'étude des interactions entre les structures tourbillonnaires et la paroi en utilisant principalement deux techniques de mesures : la PIV et l'électrochimie. Ces méthodes seront détaillées dans les chapitres suivants, et les résultats de leurs mesures serviront à tester la limite de validité du code de simulation numérique utilisant la méthode de Lattice Boltzmann, qui a été développé durant cette thèse.

## **-Chapitre III-**

Simulation numérique des écoulements et des transferts par la méthode de Lattice Boltzmann



### **3.1 Introduction**

Ce troisième chapitre est destiné à la présentation et la mise en place d'un code de calcul en langage fortran, permettant la simulation numérique des transferts dans un écoulement tourbillonnaire par la méthode Lattice Boltzmann (LBM).

On s'est intéressé essentiellement à l'écoulement autour d'un obstacle confiné présentant des instabilités caractéristiques déjà présentés au niveau de la synthèse bibliographique. L'objectif principal de ce code de calcul développé est de traiter, dans un premier temps, la partie dynamique de l'écoulement. Ce qui permettra de tracer une carte des champs de vitesse de l'écoulement et de caractériser par la suite l'évolution des instabilités selon les différents régimes d'écoulement. Dans un second temps, ce code visera l'étude du transfert massique au niveau des parois du canal. Par conséquent, ceci nous permettra de déterminer l'impact des instabilités générées dans le sillage sur le transfert de masse pariétal.

Le code LBM développé a été appliqué tout d'abord à une géométrie bidimensionnelle d'écoulement autour d'un obstacle en utilisant le modèle réseau D2Q9. Ensuite il a été étendu à une configuration tridimensionnelle d'un écoulement autour d'un barreau horizontal en employant le modèle D3Q19.

Ainsi, l'objectif de ce travail est d'écrire un code de calcul numérique, utilisant la méthode Lattice Boltzmann, permettant d'étudier à la fois la dynamique et le transfert de masse au niveau d'un écoulement tourbillonnaire typique qui est l'écoulement autour d'un obstacle.

Des mesures expérimentales à l'aide de la méthode PIV serviront, par la suite, à tester la validité des résultats de simulations obtenus en s'appuyant, en outre, sur la littérature.

Dans ce chapitre, nous commencerons tout d'abord par traiter la partie dynamique d'un écoulement autour d'un obstacle confiné bidimensionnel. Le code est étendu, par la suite à une configuration tridimensionnelle d'un écoulement autour d'un barreau.

Une deuxième partie est consacrée à l'utilisation de la LBM pour l'étude du transfert de masse pariétal dans un canal sans et avec la présence d'un obstacle.

Après avoir déterminé la carte de vitesse au niveau de l'écoulement, le code déjà développé traitant la partie dynamique sera couplé au code traitant la partie transfert.

### **3.2 Simulation par LBM de la dynamique de l'écoulement autour d'un obstacle en milieu confiné**

Dans cette partie, nous présenterons les résultats de simulation LBM de la dynamique d'un écoulement autour d'un obstacle pour différents régimes d'écoulements. L'effet de la variation

des paramètres de l'écoulement sera ainsi souligné. Un code de calcul Lattice Boltzmann écrit en langage fortran a été mis en place. Un modèle de réseau approprié a été choisi en fonction de la configuration géométrique du problème. Des comparaisons avec des résultats numériques de la littérature seront aussi présentées. Toutefois une validation expérimentale avec nos résultats expérimentaux sera détaillée au niveau du chapitre 5.

### 3.2.1 Formulation LB

#### 3.2.1.1 Étapes du calcul

La simulation numérique d'un problème d'écoulement par la méthode Lattice Boltzmann consiste à résoudre un système d'équations de Boltzmann sur un réseau bien déterminée.

En absence de forces externes ce système s'écrit :

$$f_\alpha(x + e_\alpha \delta t, t + \delta t) = \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) f_\alpha(x, t) + \frac{1}{\tau} f_\alpha^{eq}(x, t) \quad (3.1)$$

Dans lequel,

$$f_\alpha^{eq}(x, t) = \rho w_\alpha \left[ 1 + \frac{e_\alpha \cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_\alpha \cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{u^2}{2c_s^2} \right] \quad (3.2)$$

représente la fonction de distribution à l'état d'équilibre.

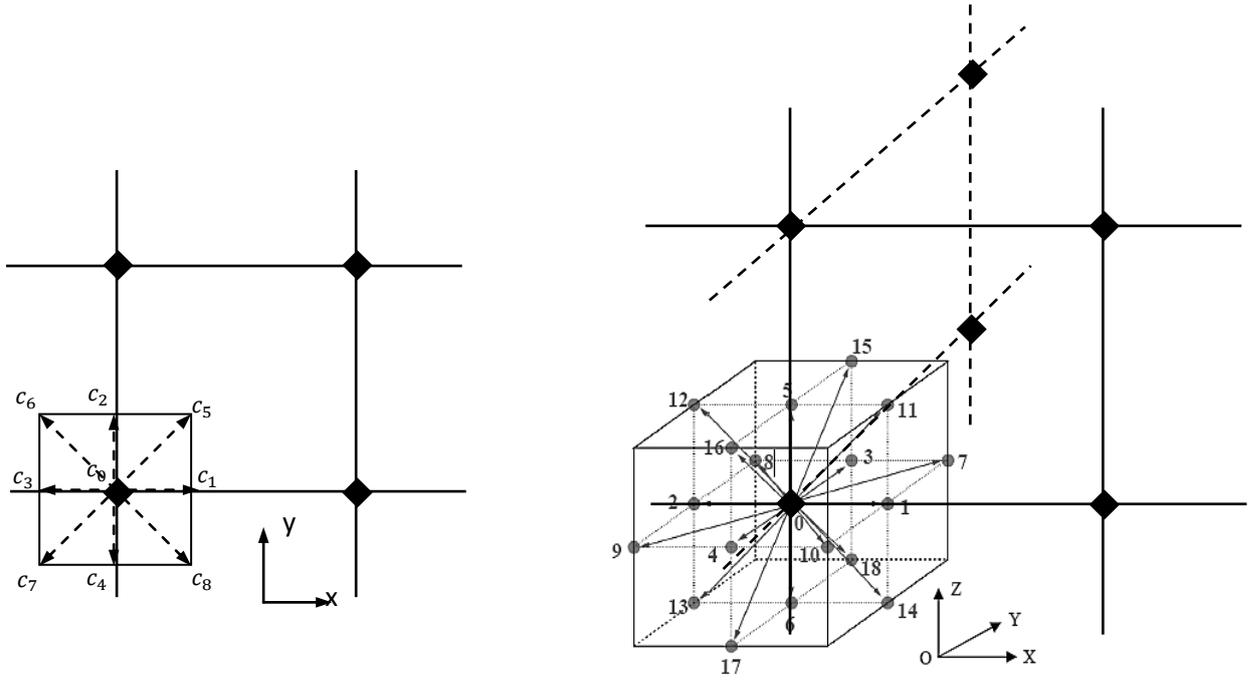
Les différents paramètres intervenants au niveau de ces équations dépendent du modèle de réseau choisi. Dans notre cas on choisira dans nos calculs bidimensionnels le modèle D2Q9 et le modèle D3Q19 dans le cas des simulations tridimensionnelles (Figure 3.1). Ces deux types de modèle sont généralement utilisés vu leur stabilité et leur précision par rapport autres type de modèles Lattice (D2Q5, D2Q7 ou D3Q15 dans le cas 3D).

Ces paramètres sont alors définis pour le D2Q9 et D3Q19 :

$$w_\alpha \begin{cases} \frac{4}{9}, \alpha = 0 \\ \frac{1}{9}, \alpha = 1 \rightarrow 4 \\ \frac{1}{36}, \alpha = 5 \rightarrow 8 \end{cases} \text{ D2Q9} \quad w_\alpha \begin{cases} \frac{1}{3}, \alpha = 0 \\ \frac{1}{18}, \alpha = 1 \rightarrow 6 \\ \frac{1}{36}, \alpha = 7 \rightarrow 18 \end{cases} \text{ D3Q19} \quad (3.3)$$

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}; \text{ la viscosité cinématique } \nu = \frac{1}{3} \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \quad (3.4)$$

Connaissant la viscosité cinématique du fluide, en introduisant un temps de relaxation adapté  $\tau$  le  $\Delta t$  peut ainsi être déterminé. Ce paramètre permet la conversion du temps Lattice en temps physique.



**Figure 3.1** : Modèle de réseau D2Q9 et D2Q19 placés dans une grille spatiale

Les modèles réseau bidimensionnel et tridimensionnel D2Q9 et D3Q19 sont constitués respectivement de 8 et de 18 vecteurs de vitesse  $c_\alpha$  dans les différentes directions du repère  $(x, y, z)$ . Le centre du réseau est affecté à une fonction de distribution nulle. Les vitesses Lattice sont listées au niveau des tableaux 2 et 3.

Les variables à déterminer sur chaque nœud sont alors les  $N$  ( $N = 9$  ou  $N = 19$ ) fonctions de distributions et par la suite les composantes de la vitesse  $u$  et  $v$  et la densité  $\rho$  comme variables macroscopiques

$\alpha$	$c_x$	$c_y$	$\alpha$	$c_x$	$c_y$
1	1	0	5	1	1
2	0	1	6	-1	1
3	-1	0	7	-1	-1
4	0	-1	8	1	-1

**Tableau 2** : Vitesses Lattice dans les différentes directions du réseau du modèle D2Q9

$\alpha$	$c_x$	$c_y$	$c_z$	$\alpha$	$c_x$	$c_y$	$c_z$
1	1	0	0	10	1	-1	0
2	-1	0	0	11	1	0	1
3	0	1	0	12	1	0	-1
4	0	-1	0	13	-1	0	-1
5	0	0	1	14	-1	0	1
6	0	0	-1	15	0	1	1
7	1	1	0	16	0	1	-1
8	-1	1	0	17	0	-1	-1
9	-1	-1	0	18	0	-1	1

**Tableau 3 :** Vitesses Lattice dans les différentes directions du réseau du modèle D3Q19

La démarche de résolution se fait en deux étapes :

Une étape de collision qui consiste à calculer en chaque nœud toutes les fonctions de distribution du modèle réseau à l'instant  $t+\Delta t$  selon l'équation (3.1).

Une deuxième étape dite de propagation qui consiste à calculer les fonctions de distribution en chaque nœud en fonction des nœuds voisins de la grille spatiale.

Chaque itération est alors constituée par le calcul des fonctions de distribution à un instant  $t$  en deux étapes successives : la collision et la propagation.

Une fois les fonctions de distributions sont déterminées au niveau d'un nœud donné de la grille spatiale, les paramètres macroscopiques du problème sont calculés selon les relations suivantes:

$$\rho = \sum_{\alpha=0}^N f_{\alpha} \quad (3.6)$$

$$u_x = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=0}^N c_{\alpha x} f_{\alpha}; \quad u_y = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=0}^N c_{\alpha y} f_{\alpha} \quad (3.7)$$

Les valeurs des fonctions de distributions affectées par les conditions aux limites du problème considéré. Les conditions aux limites physiques sont traduites afin de pouvoir les implémenter dans la résolution à l'aide de la LBM.

### 3.2.1.2 Conditions aux limites LB

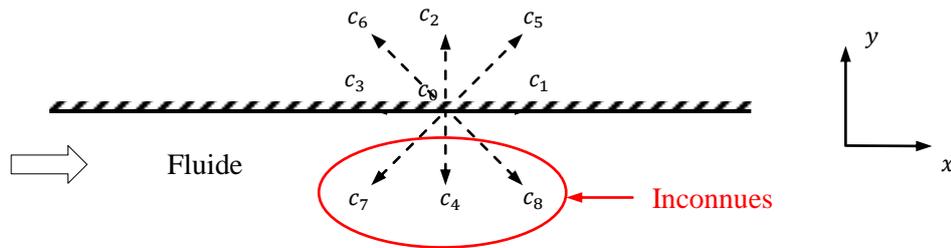
A l'issue de notre étude bibliographique au niveau du chapitre1, plusieurs approches ont été proposées afin d'adapter les conditions aux limites au niveau du calcul par la LBM.

Nous expliciterons dans les paragraphes qui suit, les méthodes de traitement des conditions aux limites relatives à notre problème.

**a. Conditions de non-glissement aux parois**

La condition Bounce Back est généralement utilisée dans le cas de non glissement sur les murs du canal ou au niveau d'un obstacle immobile dans l'écoulement.

Le principe de cette technique est simple, il s'agit de considérer qu'une particule en collision avec une paroi solide rebondit dans la direction du fluide. En considérant comme exemple, la paroi nord d'un canal 2D présentés par le schéma (Fig3.2).



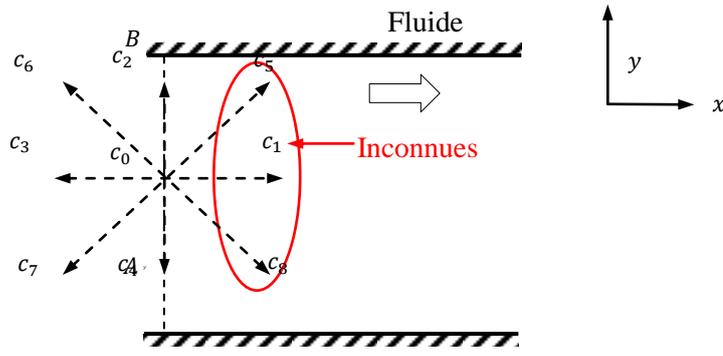
**Figure 3.2 :** Bounce-Back paroi nord du canal

A chaque nœud de la grille spatiale située sur la paroi ( $i, j = l_{max}$ ), les fonctions de distributions aux emplacements 2,5 et 6 au niveau du modèle Lattice sont connues grâce au processus de propagation. Une fois à la paroi, la présence de la limite affecte le calcul des fonctions de distribution. On suppose alors que les particules arrivant à la paroi la heurtent et rebondissent gardant les mêmes valeurs mais dans des directions opposées. Les fonctions de distribution correspondant à ces sites sont, par conséquent, obtenus par les égalités suivantes  $f_4 = f_2, f_7 = f_5$  et  $f_8 = f_6$ . La masse ainsi que la quantité de mouvement sont alors conservés.

**b. Condition à l'entrée du canal (vitesse connue)**

A l'entrée du canal sur la ligne AB représentée sur la figure (3.3), le profil de vitesse est connu. Cependant, les fonctions de distributions  $f_1, f_5$  et  $f_8$ , correspondant à chaque nœud de la grille au niveau de cette limite, sont inconnues. Ces fonctions de distribution ne peuvent pas être déterminées par le processus de propagation à partir des nœuds internes. Des conditions aux limites bien déterminées doivent alors être choisies afin de calculer ces inconnues.

Plusieurs approches peuvent dans ce cas être adoptées. Nous adoptons dans notre cas d'étude, l'approche de Zou et He (1997) qui consiste à déterminer les fonctions de distributions inconnues en se basant sur les bilans de conservation de masse et de quantité de mouvement traduit par les équations (3.6) et (3.7).



**Figure. 3.3 :** Fonction de distribution à l'entrée du canal

En considérant un écoulement incompressible (2D) monophasique les équations de conservations peuvent s'écrire sous forme d'un système de 3 équations :

$$\rho = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \quad (3.8)$$

$$\rho u = f_1 + f_5 + f_8 - f_6 - f_3 - f_7 \quad (3.9)$$

$$\rho v = f_5 + f_2 + f_6 - f_7 - f_4 - f_8 \quad (3.10)$$

Dans le cas où les deux composantes de vitesse  $u$  et  $v$  sont connues on obtient un système de 3 équations à quatre inconnues ( $\rho$  et les 3 fonctions de distributions). Zou et He (1997) proposent alors une nouvelle condition d'équilibre normal à la limite d'entrée (ligne AB) permettant ainsi de fermer le problème. Cette condition est traduite par l'égalité des fonctions de non-équilibre normales à la limite d'entrée :

$$f_1^{ne}(i = 0, j, t) = f_3^{ne}(i = 0, j, t) \quad (3.11)$$

Qui s'écrit :

$$(f_1 - f_1^{eq})_{x=0} = (f_3 - f_3^{eq})_{x=0} \quad (3.12)$$

Les fonctions de distributions à l'équilibre sont calculées selon l'équation (3.2).

La résolution du système d'équations permet ainsi d'obtenir les expressions suivantes permettant de calculer les fonctions de distribution inconnues à chaque instant  $t$  :

$$\rho = \frac{1}{1-u} [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7)] \quad (3.13)$$

$$f_1 = f_3 + \frac{2}{3}\rho u \quad (3.14)$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}\rho u + \frac{1}{2}\rho v \quad (3.15)$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}\rho u - \frac{1}{2}\rho v \quad (3.16)$$

Ce type de traitement de conditions aux limites peut aussi être appliqué dans le cas d'une configuration tridimensionnelle en admettant également l'hypothèse de l'égalité des fonctions de distribution de non –équilibres normales à la paroi.

Dans certains travaux dans la littérature, la condition de Zou et He a été également utilisée au niveau de la limite à la sortie de canal (Guo Zhou, 2003). On explicitera dans le paragraphe qui suit la méthode adoptée dans notre cas d'étude.

### c. Condition à la sortie du canal

Plusieurs approches peuvent être adoptées afin de traiter les conditions aux limites à la sortie du domaine (He et Luo, 1996 et 1997). Dans notre code de calcul, nous avons considéré l'approche du zéro gradient jugée généralement satisfaisante. Cette méthode consiste à imposer un gradient nul des fonctions de distribution normales à la limite de sortie (ligne CD).

Selon la figure (3.4) présentant la sortie du canal dans notre cas d'étude, les fonctions de distribution à déterminer sont :  $f_6, f_3$  et  $f_7$ .

Dans ce cas, à l'issue de l'étape de propagation les fonctions inconnues se calculent selon l'équation suivante :

$$f_{\alpha}(L_x, j) = f_{\alpha}(L_x - 1, j) \quad (3.17)$$

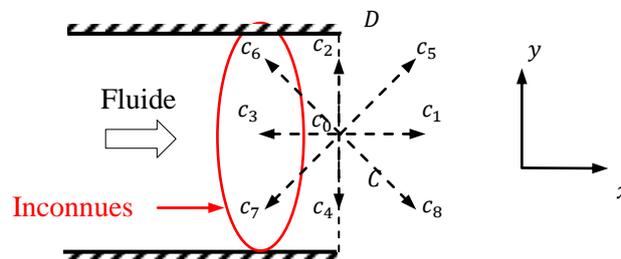


Figure 3.4 : Fonction de distribution à la sortie du canal

#### 3.2.1.3 Algorithme de Calcul

La simulation de l'écoulement par la méthode Lattice Boltzmann se réalise ainsi selon différentes étapes bien ordonnées. Nous présentons dans ce qui suit, les séquences de calcul suivies au niveau de notre code de calcul numérique. L'algorithme général est présenté par le tableau 4.

Les différentes séquences présentées seront par la suite décrites en détails par l'intermédiaire d'une interface utilisateur construite au niveau de notre code numérique.

---

---

**Algorithme de Calcul**

---

1 : Définition du problème et entrée des données :	$Re, \nu; \Delta x, \Delta y, N_x, N_y, \tau$
2. Initialisation des variables macroscopiques :	$\rho, u, v$
3. Calcul de l'étape de collision	$f_\alpha^{t+1} = f_\alpha^t \left[ 1 - \frac{1}{\tau} \right] + \frac{1}{\tau} f_\alpha^{eq}$
4. Etape de propagation (balayage du domaine)	$f_\alpha^{t+1}(i+1, j+1) = f_\alpha^{t+1}(i, j)$
5. Traitement des conditions aux limites	
6. Mise à jour des variables macroscopiques	
7. Conversion en unité physique	
8. Stockage des valeurs calculées	
9. Condition d'arrêt	

---

---

**Tableau 4** : Schéma de l'algorithme général de calcul par LBM

### 3.2.1.4 Interface de dialogue

Le code source développé pour les simulations LBM, est écrit en langage Fortran-90 et exécuté sur un processeur PC X64 unique grâce à un compilateur Intel Visual Fortran XE (2011). Dans l'objectif de généraliser notre code calcul et de rendre son utilisation plus flexible, nous avons construit une interface de dialogue utilisateur permettant d'introduire manuellement les différents paramètres du problème à étudié.

Nous présenterons dans ce qui suit en détails l'interface de dialogue développée.

L'interface permet l'accès à trois types de problèmes: la simulation de l'écoulement autour d'obstacle, la simulation du transfert et la simulation de l'écoulement de Poiseuille. Chaque type de problème est indexé par un chiffre (0-2). Le problème à étudier dépendra ainsi du choix de l'utilisateur. Une fois l'étude est sélectionnée, une deuxième étape consiste à introduire les différents paramètres (physiques et numériques) définissant la configuration du problème.

Nous présentons au niveau de la figure 3.5 le cas de la simulation d'un écoulement autour d'un obstacle (choix 0).

```

choisir le type de probleme:
-----
<0>Simulation dynamique
<1>Simulation transfert
<2>Eclt Poiseuille
Choix =
0
Donner ReD
*****
Donner la viscosite cinematique
*****
Donner la longueur caracteristique(m) <hauteur de l'obstacle>
*****
Donner le temps de relaxation
*****
Donner la longueur caracteristique(lb) <hauteur de l'obstacle>
*****

Domaine de calcul
-----
Nbre de noeuds sur la Longueur <lb>: *****
Nbre de noeuds sur la Hauteur <lb>: *****
Nombre de points total de la grille = *****

```

Etape 1

Etape 2

Figure 3.5 : Interface de Dialogue utilisateur : 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> étape choix de l'étude et définition des paramètres du problème

La taille du domaine de calcul en termes de nœuds Lattice est ensuite affichée avant de passer à une troisième étape qui servira à la définition de la forme, les dimensions ainsi que l'emplacement de l'obstacle présentée par la figure 3.6. Les paramètres ainsi à introduire par l'utilisateur dépendent de la géométrie choisie.

**Etape 3 :**

**Cas d'un carré**

```

Choix de la geometrie de l'obstacle
-----
obj=0 si obst carre,1 si obst rectangulaire et 2 si obst circulaire
0
Donner la position de l'obstacle
obstx=
*****
obsty=
*****

```

-a-

**Cas d'un rectangle**

```

Choix de la geometrie de l'obstacle
-----
obj=0 si obst carre,1 si obst rectangulaire et 2 si obst circulaire
1
Donner la position de l'obstacle
obstx=
*****
obsty=
*****
Donner la largeur de l'obst
l=
*****

```

-b-

## Cas d'un cercle

```
Choix de la geometrie de l'obstacle
-----
obj=0 si obst carre,1 si obst rectangulaire et 2 si obst circulaire
2
Donner la position de l'obstacle
Coordonnees centre du cercle
obstx=
*****
obsty=
*****
```

-C-

Figure 3.6 : Interface de Dialogue utilisateur : 3<sup>ème</sup> étape choix de la géométrie de l'obstacle

La dernière étape de l'interface de dialogue utilisateur consiste à introduire, dans un premier lieu, le temps d'itération maximal (Figure 3.7). Ce paramètre est choisi selon la nature du problème étudié. La conversion en unité physique du temps d'itération nous fournit l'instant physique  $t$  du phénomène.

### Etape 4 :

```
parametres temps d'iteration
-----
Donner le temps de calcul
Total calcul=
*****
Donner le temps d'echantillonnage=
T_ech=
*****
Debut des calculs...
```

Figure 3.7 : Interface de Dialogue utilisateur : 4<sup>ème</sup> étape définition du temps de calcul

Le paragraphe qui suivra sera consacré à une première application du code de calcul développé à un écoulement de Poiseuille caractérisé par une solution analytique connue.

## 3.2.2 Simulation de la dynamique de l'écoulement bidimensionnel de Poiseuille

### 3.2.2.1 Solution analytique

L'écoulement de Poiseuille (également appelée écoulement de Hagen-Poiseuille) est un écoulement laminaire d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique.

La solution analytique de ce type d'écoulement est bien connue et a été vérifiée expérimentalement pour des conduites de petits rayons.

Pour cette raison, ce type d'écoulement nous servira de Benchmark du code de simulation LBM développé.

Dans le cas d'un écoulement dynamiquement établi, la vitesse dans un écoulement de Poiseuille est alors régi par la variation de pression entre l'entrée et la sortie du canal, le profil de vitesse est parabolique et s'écrit en fonction de la vitesse maximale :

$$u(y) = U_{max} \left( \frac{4y}{h} - \frac{4y^2}{h^2} \right) \quad (3.18)$$

avec  $U_{max} = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$

### 3.2.2.2 Résultats numériques LBM

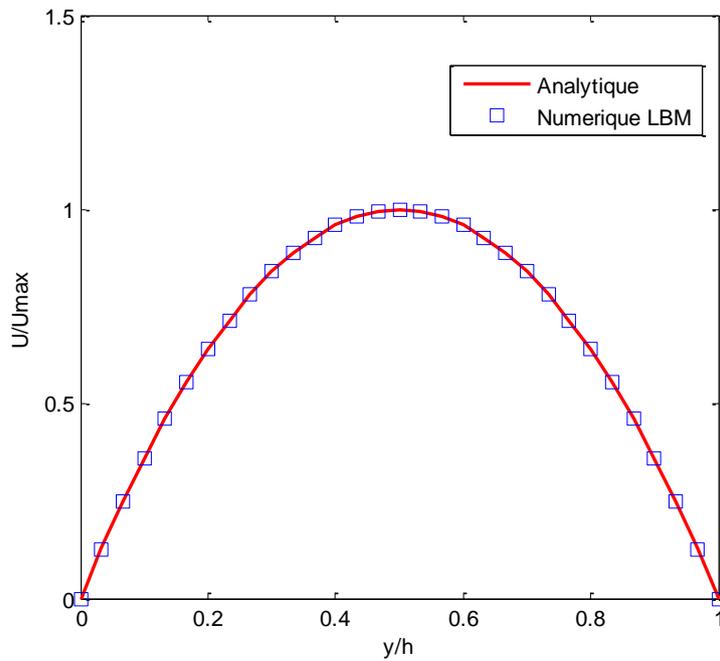
Afin de comparer, dans le cas de l'écoulement de Poiseuille, le résultat de simulation obtenu par la méthode Lattice Boltzmann à la solution analytique connue, nous avons choisi le modèle de réseau bidimensionnel D2Q9. En considérant le nombre de Reynolds  $Re = \frac{U_0 h}{\nu} = 80$ , la viscosité cinématique  $\nu$  du fluide est prise égale à  $10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$  et le temps de relaxation LB  $\tau$  est pris initialement égal à 0,56 indépendamment des pas de temps et de l'espace. La hauteur physique  $h$  du canal a été choisie égale à  $0.03 \text{m}$  et la longueur  $L$  a été choisie égale à  $0.6 \text{m}$ .

La figure 3.9 présente une comparaison du résultat de la simulation numérique par LBM avec la solution analytique. La courbe présente le profil de vitesse dans un plan perpendiculaire à l'axe de l'écoulement à une distance  $x = L/2$  de l'entrée du canal. On observe une bonne concordance entre les deux types de solutions. En considérant une grille constituée de  $600 \times 60$  nœuds Lattice, la solution numérique se joint à la solution analytique environ à  $10^{-4}$  près ( $|U_{an} - U_{LBM}| < 10^{-4}$ ). On définit ce temps  $t_1$  calculé, comme étant un temps référence.

Le temps  $t_1$  correspond pratiquement au commencement du régime stationnaire qu'on a défini par un critère  $|U(t + \delta t) - U(t)| < 10^{-5}$  au niveau du plan considérée. En conversion en unité physique ce temps correspond à  $t_1 = 100 \text{s}$ .

Dans le cas d'une configuration de Poiseuille, l'augmentation de la taille de la grille améliore la précision de la solution obtenue numériquement.

Afin de mettre en évidence l'effet de la taille des grilles spatiales, on a utilisé trois grilles différentes et un temps physique  $t_2 = 200 \text{s} > t_1$ . Les résultats obtenus avec les trois grilles sont résumés au tableau 5.



**Figure 3.8 :** Profil de vitesse numérique (LBM) à  $x = L/2$  superposé à la solution analytique (60x600 nœuds)

On présente dans le tableau 5 l'écart moyen entre la solution analytique et la solution LBM ainsi que le nombre d'itération nécessaire pour le régime stationnaire.

Une augmentation de la taille de la grille améliore la précision de la solution LBM. Cependant, ceci entraîne une augmentation considérable du temps de calcul. D'où la nécessité de trouver un compromis entre ces deux paramètres. Dans notre cas nous avons opté pour une grille de taille 60x600 nœuds.

Taille de la grille	Erreur $ (U_{an} - U_{LBM}) $	Erreur relative%	Itération
300x30	$1,3323 \times 10^{-4}$	0.0330	5000
600x60	$5,5160 \times 10^{-5}$	0.0136	10000
900x90	$1,6875 \times 10^{-5}$	0.0043	19000

**Tableau 5 :** Précision de la solution LBM par rapport à la solution analytique et temps d'itération nécessaire pour trois grilles de tailles différentes

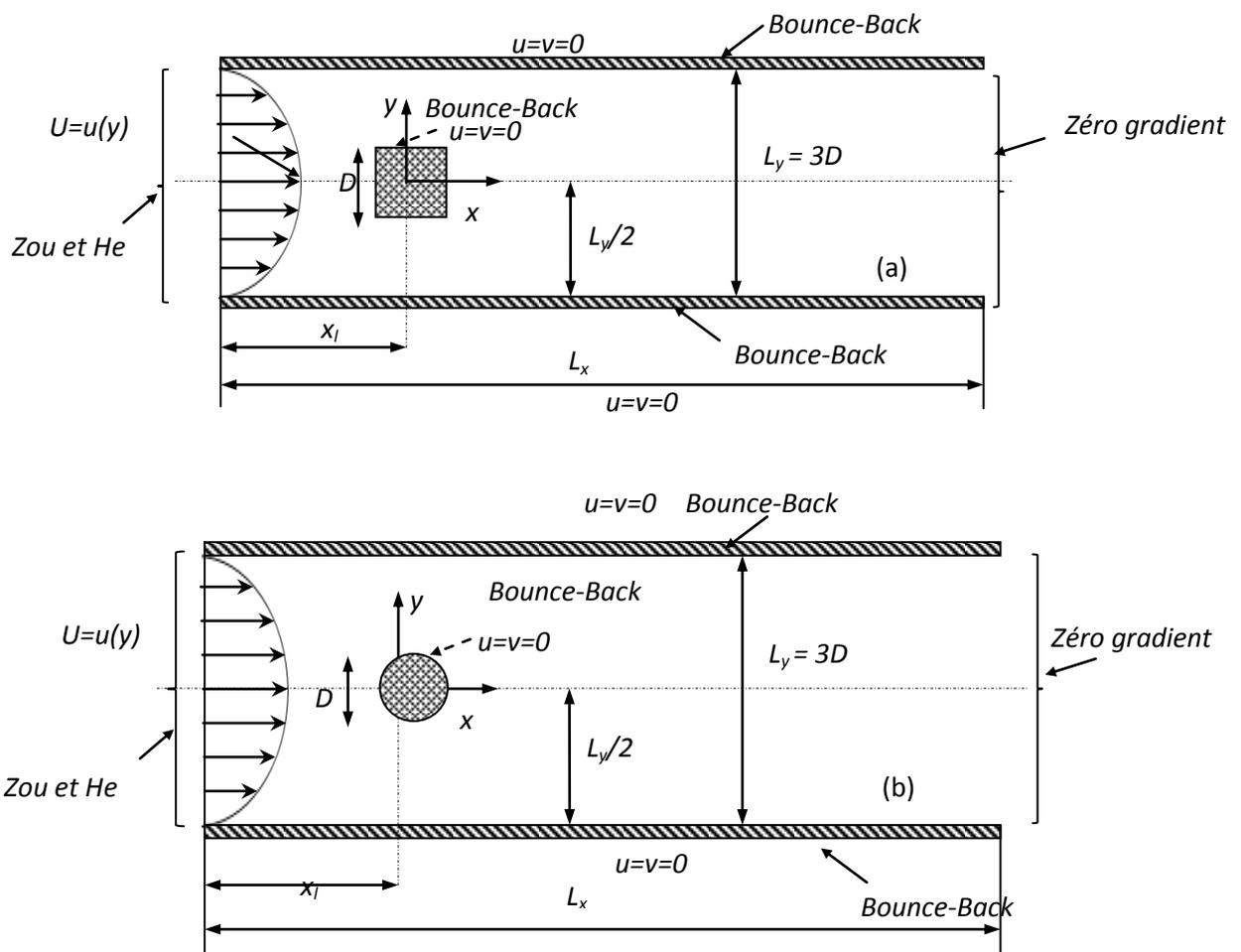
### 3.2.3 Simulation de l'écoulement bidimensionnel autour d'un obstacle dans un milieu confiné

Dans cette section, les résultats de la simulation numérique d'un écoulement bidimensionnel sont présentés et discutés. Un modèle Lattice D2Q9 a été adopté. Afin de tester la validité du code, deux géométries différentes d'obstacles (circulaire et carrée) ont été choisies.

#### 3.2.3.1 Configurations géométriques du problème

Le domaine de calcul défini par  $(0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y)$  est divisé en une grille régulière tel que  $(\Delta x = \Delta y)$  d'une taille totale de nœuds  $N_x \times N_y = 600 \times 60$  nœuds.

Un rapport de confinement de  $r = 1/3$  a été fixé. Dans ce cas, seul le nombre de Reynolds, basé sur la hauteur de l'obstacle et la vitesse moyenne à l'entrée du canal  $Re_D = \frac{U_m D}{\nu}$ , permet de contrôler les différents régimes de l'écoulement. A l'entrée du canal un profil de vitesse parabolique est imposé. A la sortie du canal nous avons proposé d'appliquer la condition aux limites de zéro gradient. L'hypothèse d'écoulement non-glissant est appliquée aux parois ainsi qu'à l'obstacle immobiles. Les figures (3.10-a et -b) illustre le schéma géométrique des problèmes test étudiés.



**Figure 3.9 :** Configuration géométriques et conditions aux limites (physiques et LB) dans le cas d'un obstacle de forme carré.

### 3.2.3.2 Résultats LBM

Nous présenterons au niveau de cette partie quelques résultats de la simulation de la dynamique de l'écoulement autour d'un obstacle par la méthode Lattice Boltzmann. L'objectif est de vérifier la performance de la méthode LB en termes de reproduction des différents régimes d'écoulement en fonction des paramètres d'écoulement. Une validation expérimentale et une exploitation des résultats numériques seront détaillées au niveau du chapitre 5.

#### 3.2.3.2.1 Régimes d'écoulements

Nous proposons de reproduire numériquement la dynamique de l'écoulement laminaire incompressible autour d'un obstacle de deux formes différentes : carré et circulaire. La reconstruction d'une cartographie numérique de la vitesse de l'écoulement, nous permettra de délimiter les différents régimes en fonction du nombre de Reynolds.

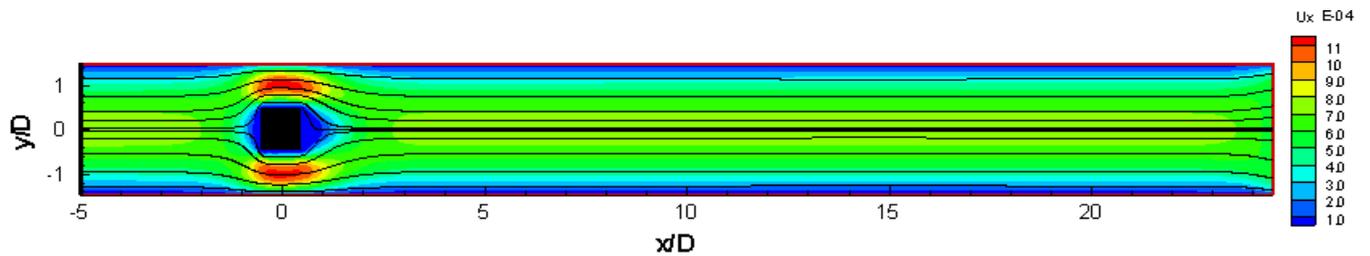
##### a- Obstacle carré

Pour des nombres de Reynolds assez faible ( $Re = 5$ ), les résultats de la simulation numériques illustrés par la figure (3.10) et la figure (3.14-a) montrent des lignes de courant collées à la paroi qui se ferment immédiatement derrière le cylindre. Le sillage de l'obstacle est parfaitement stable, aucune forme d'instabilités n'apparaît encore, il s'agit bien du régime rampant caractérisé par la prépondérance des effets visqueux. En augmentant le nombre de Reynolds jusqu'à une valeur  $Re = 50$ , deux tourbillons contrarotatifs apparaissent derrière l'obstacle caractérisant le régime de recirculation. La figure (3.11- a) présente les lignes de courant superposé aux contours de la composante axiale de vitesse instantanée  $U_x$ . Le champ de vitesse est symétrique par rapport à l'axe de symétrie du canal et les lignes de courant montrent bien la présence des tourbillons contrarotatifs fixes derrière l'obstacle carré. Nous avons présentés sur la figure (3.11- b) les contours de vorticité qui montrent la présence de vorticité de signe opposée de part et d'autre de l'obstacle.

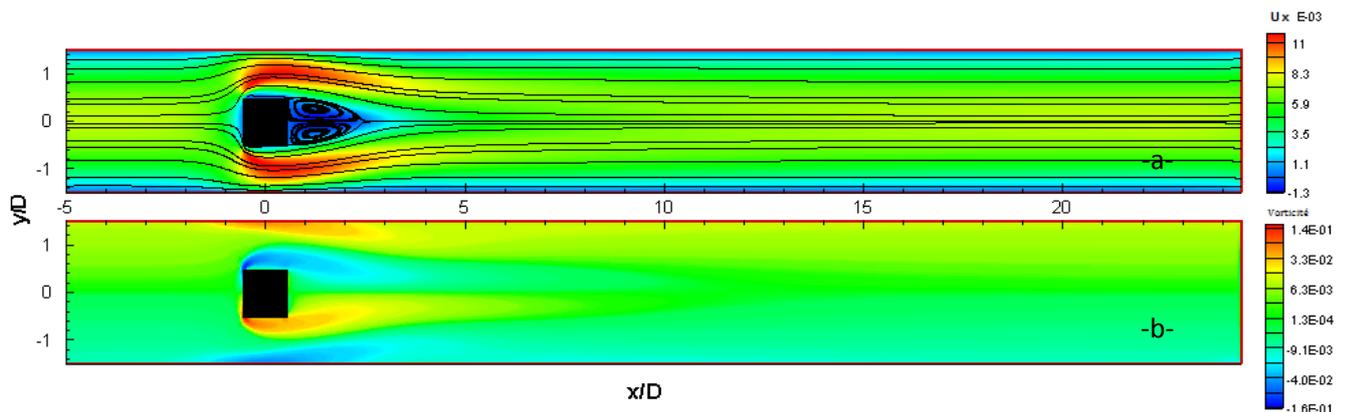
L'évolution de longueur de recirculation  $L_r$  ou longueur des tourbillons contrarotatifs est un paramètre important pour la caractérisation du régime de recirculation. Généralement dans la littérature, l'évolution de la longueur de recirculation est formulée en fonction du nombre de Reynolds (Coutanceau et Defaye, 1991 ; Zdravkovich, 1997 ; Guerrouache, 2000). Nous étudierons par la suite, l'effet des variations des paramètres de contrôle ainsi que les paramètres de calcul sur cette longueur.

Ce régime d'écoulement prend fin dès l'apparition des premières lâchées tourbillonnaires et le développement d'un aspect oscillatoire et instationnaire du sillage ce qui correspond à un nombre

de Reynolds dit critique ( $Re_c$ ). Selon les résultats de simulations LBM obtenus, le régime de recirculation stationnaire se prolonge jusqu'à un nombre de Reynolds de  $Re = 72$ . Ce résultat est confirmé par les mesures expérimentales de Dhoueib el al. (2010) et Okajima et al.(1997).



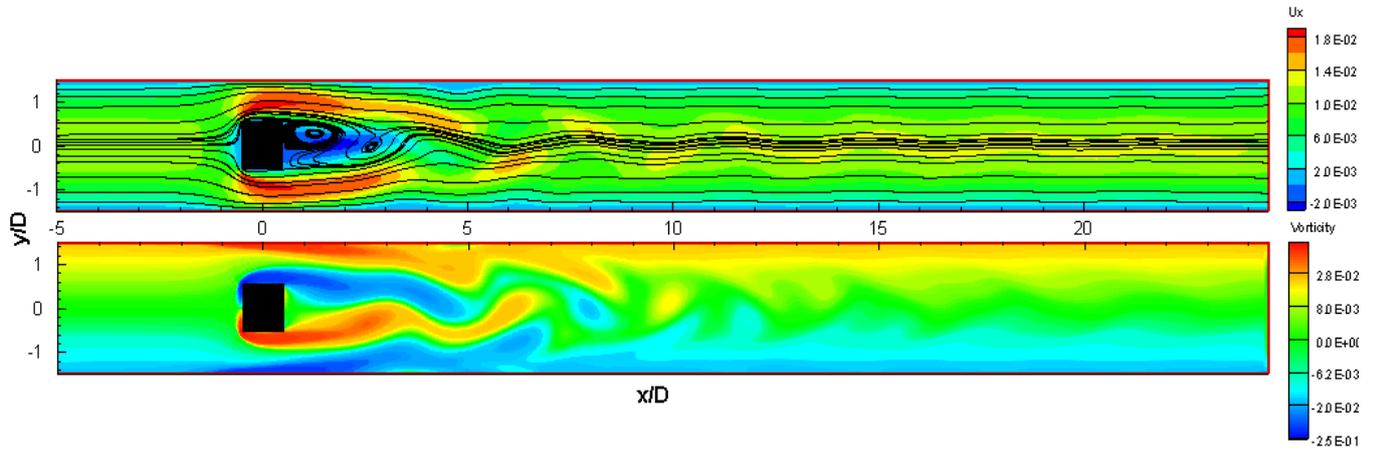
**Figure 3.10** : Lignes de courant et Iso contour de la composante axiale de la vitesse pour un Reynolds  $Re = 5$



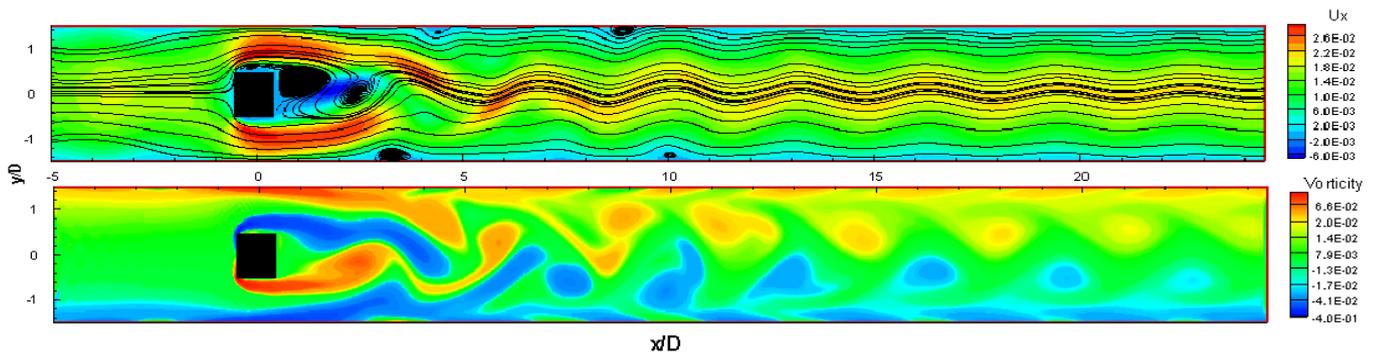
**Figure 3.11** : Lignes de courant et Iso contour de la composante axiale de la vitesse et de la vorticité pour un Reynolds  $Re=50$

Au-delà du nombre Reynolds critique ( $Re = 80 > Re_c$ ) l'observation des lignes des courant et des contours de vitesses obtenus (figure 3.12) montre un sillage instationnaire et l'émission alternée de tourbillons. La figure 3.14-a illustre le caractère périodique du sillage pour un nombre de Reynolds  $Re = 120$ .

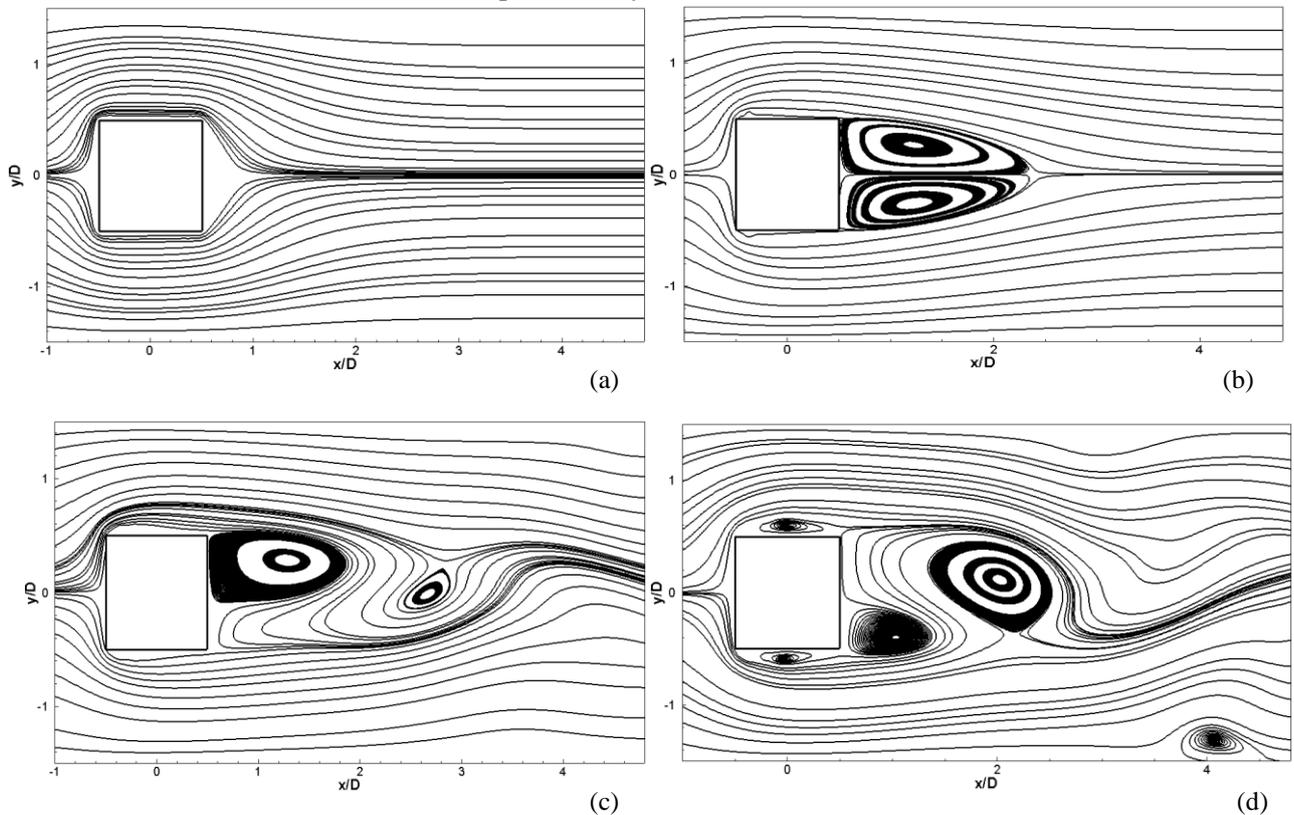
En examinant le champ de vorticité (Figure 3.13-b), on remarque bien la présence de deux types de tourbillons alternés de signes opposées qui finissent par s'atténuer à partir d'une certaine distance de l'obstacle. A cause du confinement, cette atténuation du sillage est plus rapide que dans le cas d'un obstacle immergé dans un milieu infini.



**Figure 3.12** : Lignes de courant et Iso contour de la composante axiale de la vitesse et de la vorticité pour un Reynolds  $Re = 80$



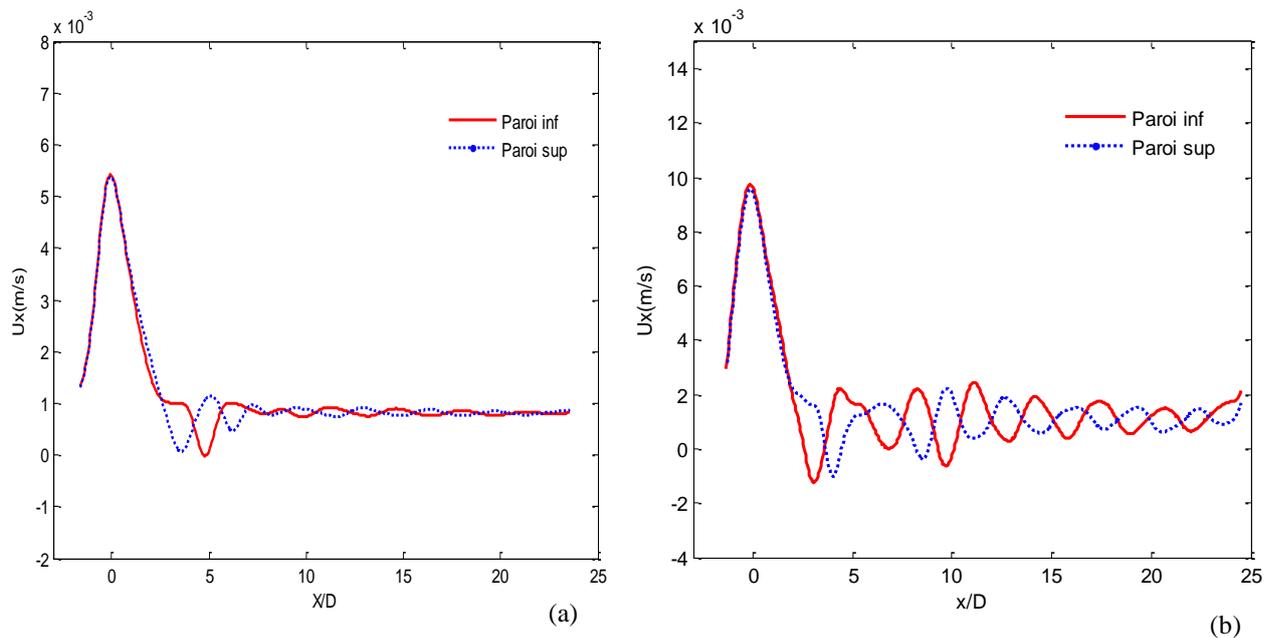
**Figure 3.13** : Lignes de courant et Iso contour de la composante axiale de la vitesse et de la vorticité et pour un Reynolds  $Re = 120$



**Figure 3.14** : Lignes de courant autour de l'obstacle carré pour différents nombres de Reynolds : a)  $Re=50$  ; b)  $Re=80$  ; c)  $Re=120$

A ce niveau, les tourbillons se heurtent aux couches limites des parois provoquant ainsi la naissance de tourbillons secondaires moins rapides. Ce phénomène a été aussi observé par Mathis (1984) et Kiehm (1986) qui ont constaté qu'à partir d'un confinement  $r > 0,3$ , la naissance des structures secondaires est considérablement favorisée.

Le profil instantané de la vitesse axiale le long de la zone proche paroi du canal permet de détecter et de localiser la présence de ces tourbillons secondaires (Guerrouache (2000)). Nous avons ainsi tracé sur la figure (3.15) le profil de la vitesse axiale instantané obtenu par LBM au niveau des nœuds immédiatement voisins de la paroi supérieure et inférieure pour deux nombre de Reynolds différents (soit à une distance =  $\Delta y$  par rapport à la paroi).



**Figure 3.15** : Profils instantanés de vitesse axiale le long des parois supérieure et inférieure pour deux Reynolds différents : a)  $Re=80$  ; b)  $Re=120$

La présence des tourbillons secondaires est marquée par des valeurs négatives au niveau des profils de vitesses instantanées obtenues (Rehimi, 2006). Nous pouvons ainsi déduire à partir de la figure 3.15-a qu'à l'instant choisi, il y'a, pour  $Re=80$ , un unique tourbillon secondaire au niveau de chaque paroi situé respectivement à une  $x = 3,65D$  et  $x = 4,85D$  du centre de l'obstacle.

Pour un nombre de Reynolds plus élevé ( $Re = 120$ ), la figure 3.15-b montre l'apparition de plusieurs tourbillons de paroi de taille plus importante. Afin d'observer la création et l'évolution au cours du temps du sillage de l'obstacle, nous avons représenté dans les figures (3.16) et (3.17) les iso-contours de la composante axiale de la vitesse et de la vorticité à des différents instants.

Au début, avant l'apparition des premiers lâ  ch  s tourbillonnaires, l'écoulement détient un aspect transitoire caractérisé par un allongement progressif de la zone de recirculation. Le sillage de l'obstacle garde encore sa symétrie. Après une certaine durée les premiers lâ  ch  s tourbillonnaires

apparaissent et le sillage commence à osciller. Nous présenterons par la suite la simulation numérique du comportement du sillage dans le cas d'un obstacle de forme circulaire. Par conséquent, on soulignera l'effet de la modification de la forme de l'obstacle sur l'évolution du sillage et le développement des différents régimes de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds.

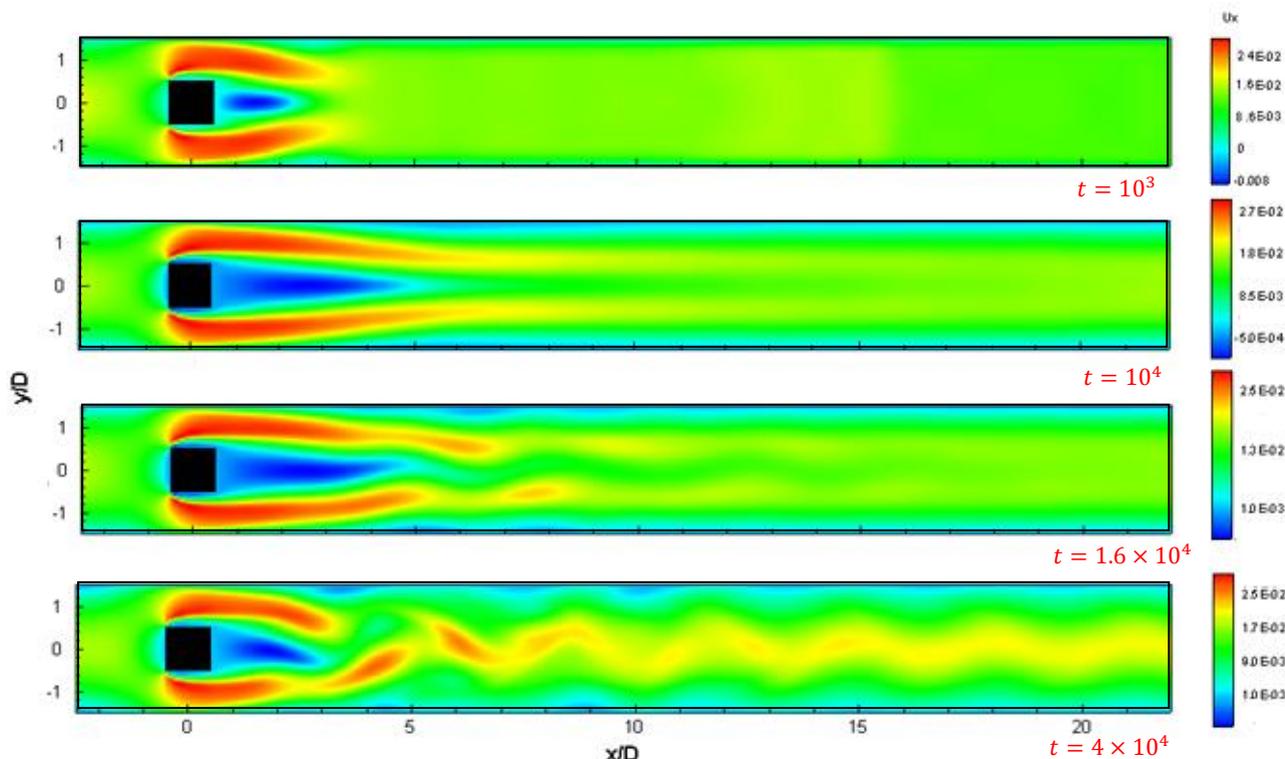


Figure 3.16 : Contours de la composante axiale de la vitesse pris à des instants différents du calcul ( $Re=100$ )

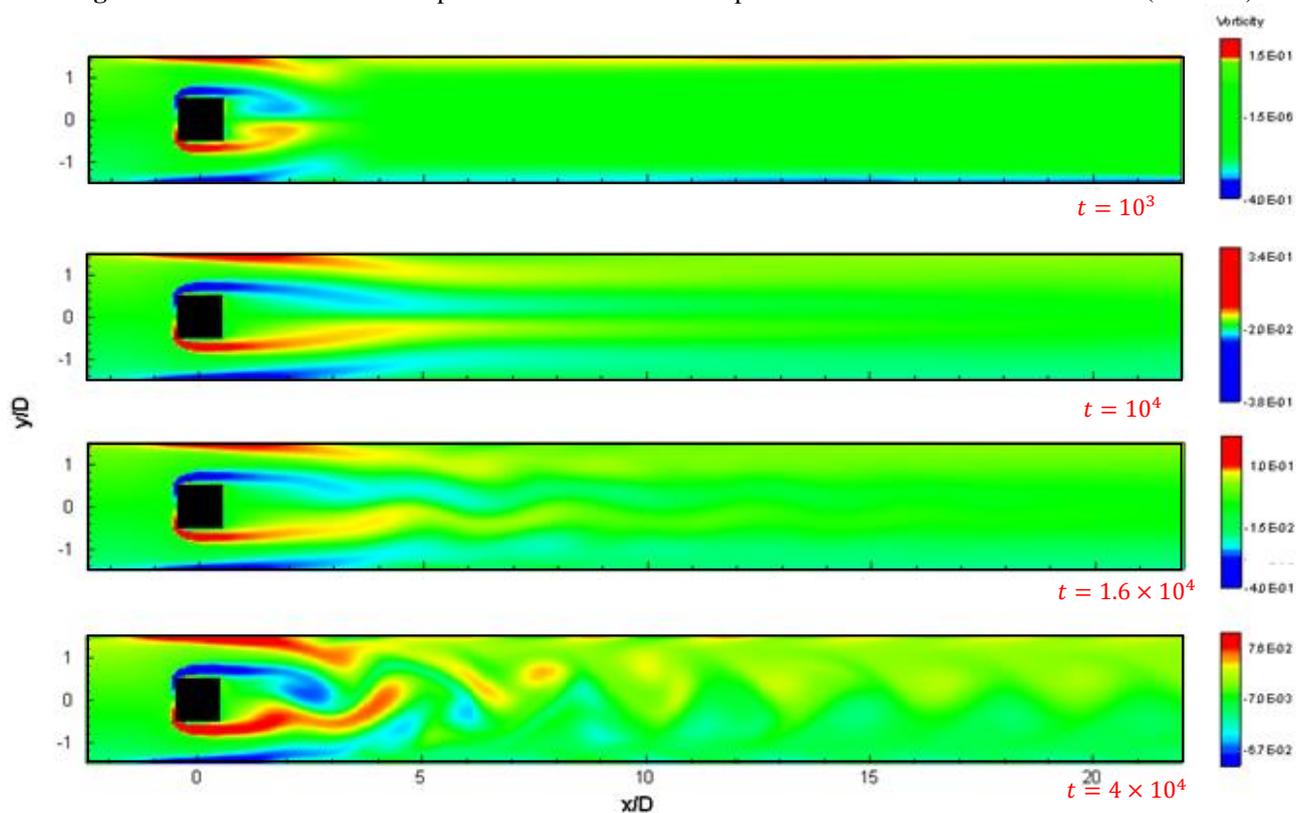


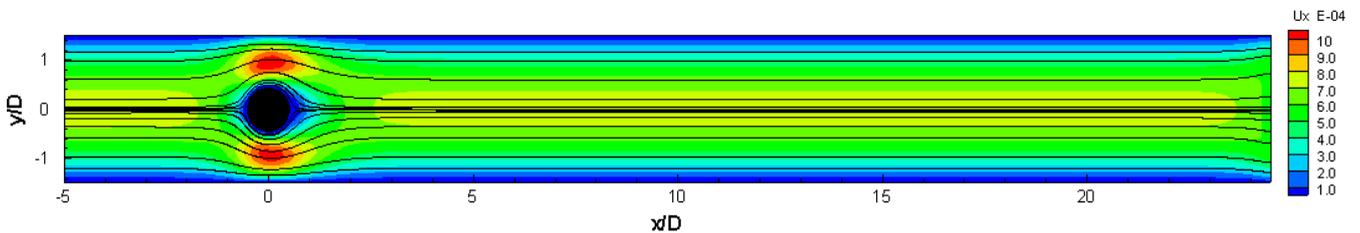
Figure 3.17 : Contours de vorticité pris à des instants différents du calcul ( $Re=100$ )

### b- Obstacle circulaire

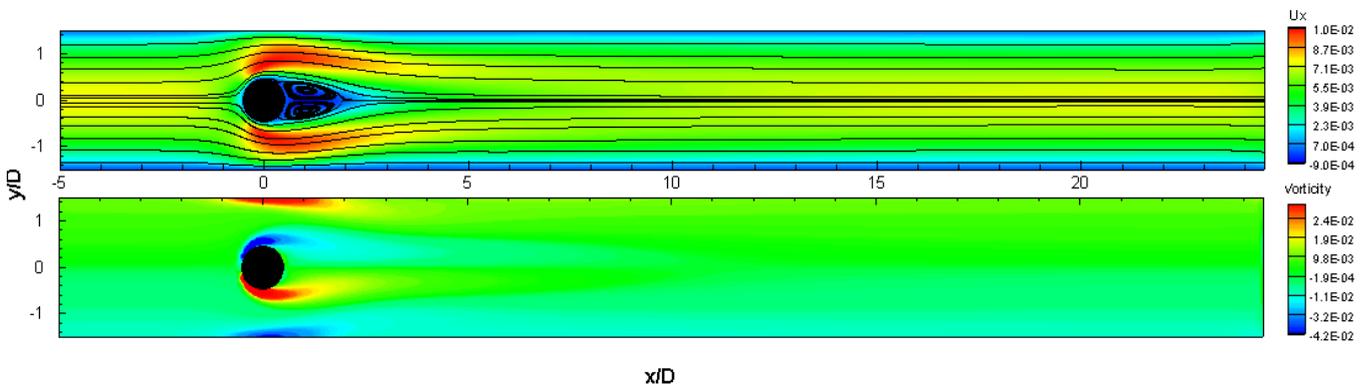
Nous présentons au niveau de cette partie les résultats de la simulation numérique obtenu par la méthode LB pour la configuration géométrique présentée par la figure (3.9-b). Nous avons ainsi procédé par des calculs des champs de vitesse pour les mêmes nombres de Reynolds choisis dans le cas de l'obstacle carré afin de pouvoir comparer le comportement de l'écoulement pour les deux types d'obstacles.

Les figures (3.18-21) illustrent les résultats numériques obtenus par la méthode LB sous forme de lignes de courant et d'iso-contours de la composante axiale de la vitesse et de la vorticité pour différents nombres de Reynolds:  $Re = 5$  ;  $Re = 50$  ;  $Re = 80$  et  $Re = 120$ .

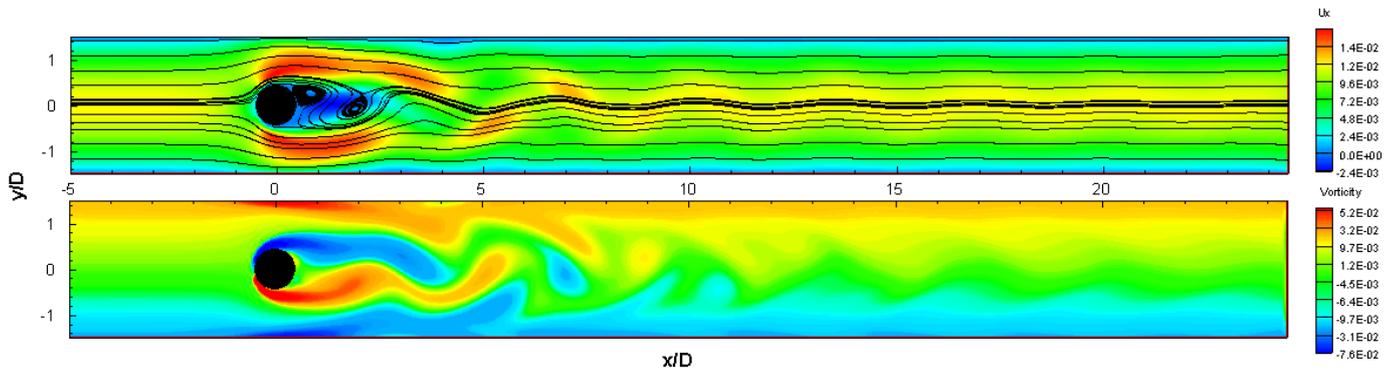
L'observation des contours de vitesse et de vorticité montre un comportement du fluide similaire au cas d'un écoulement autour d'un obstacle de forme carré. Pour un nombre de Reynolds faible ( $Re = 5$ ), le régime est bien rampant. Les lignes de courant (figure 3.22-a) adoptent la forme arrondie de la paroi de l'obstacle et le sillage est stable (figure 3.18). Pour un nombre de Reynolds plus élevées ( $Re = 50$ ) on observe, similairement au cas d'un obstacle carré, la formation des deux tourbillons contrarotatifs collés à l'aval de l'obstacle et un sillage qui garde sa stabilité (figure 3.19).



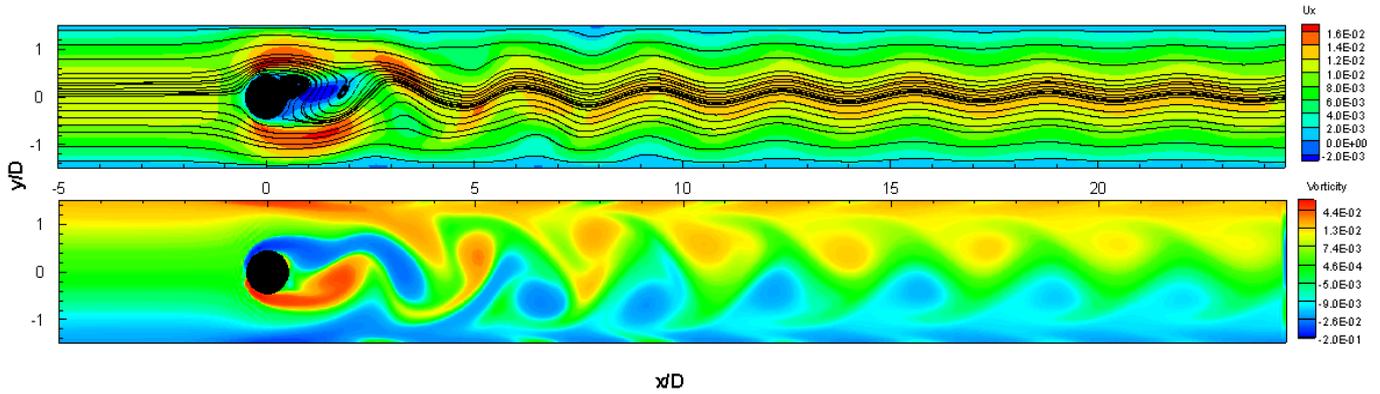
**Figure 3.18** : Lignes de courant et Iso contour de la composante axiale de la vitesse pour un Reynolds  $Re = 5$



**Figure 3.19** : Lignes de courant et Iso contour de la composante axiale de la vitesse pour un Reynolds  $Re = 50$

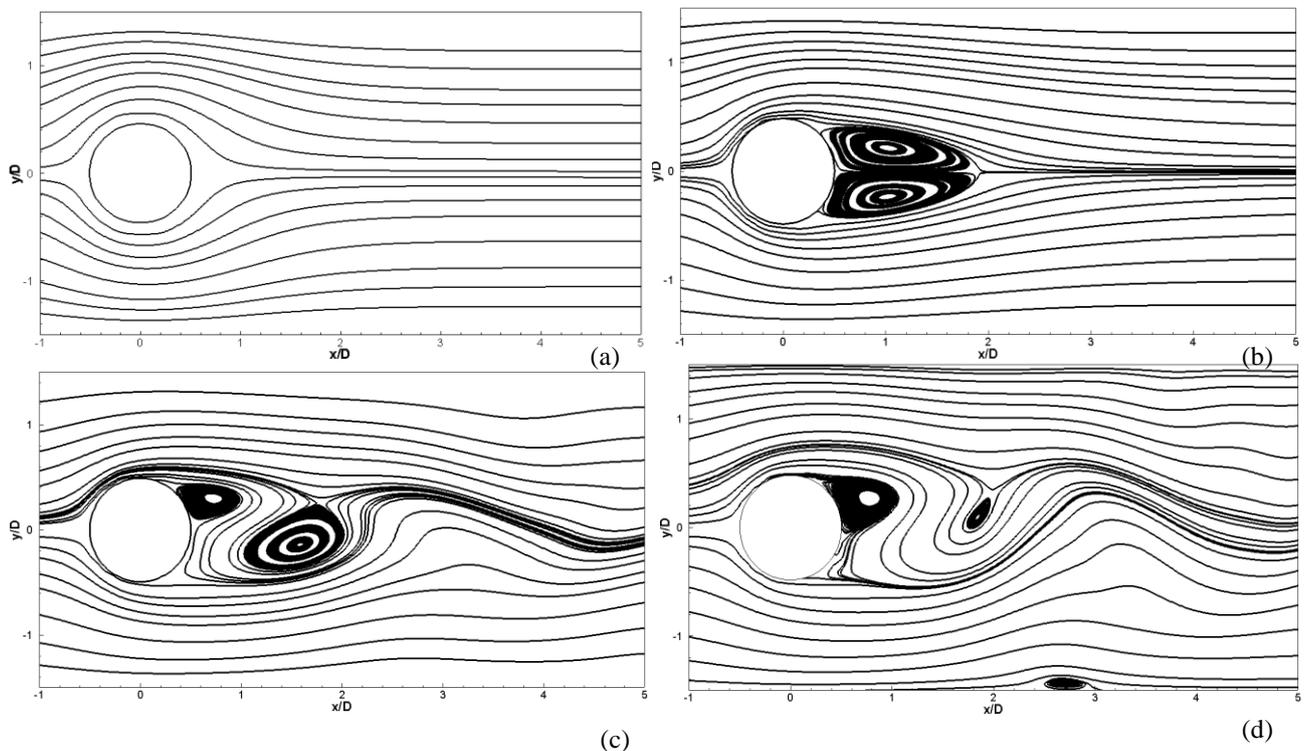


**Figure 3.20 :** Lignes de courant et Iso contour de la composante axiale de la vitesse et de la vorticité pour un Reynolds  $Re = 80$



**Figure 3.21 :** Lignes de courant et Iso contour de la composante axiale de la vitesse et de la vorticité pour un Reynolds  $Re = 120$

Les lignes de courants présentés par la figure (3.22-b) mettent en évidence la forme et les dimensions des tourbillons contrarotatifs caractéristiques du régime de recirculation.



**Figure 3.22 :** Lignes de courant autour de l'obstacle circulaire pour différents nombres de Reynolds : a)  $Re = 5$  ; b)  $Re = 50$  ; c)  $Re = 80$  ; d)  $Re = 120$

Afin d'entamer une comparaison quantitative du comportement de l'écoulement autour d'un obstacle carré et un obstacle circulaire dans le cas d'un régime de recirculation, nous nous sommes intéressés à l'évolution de la vitesse le long de la ligne centrale du canal. Ceci, nous permet par la suite de déterminer la longueur de recirculation de l'écoulement (Willamson, 1996 et Paranthöen, 1998).

La vitesse de la ligne centrale s'écrit selon l'équation suivante :

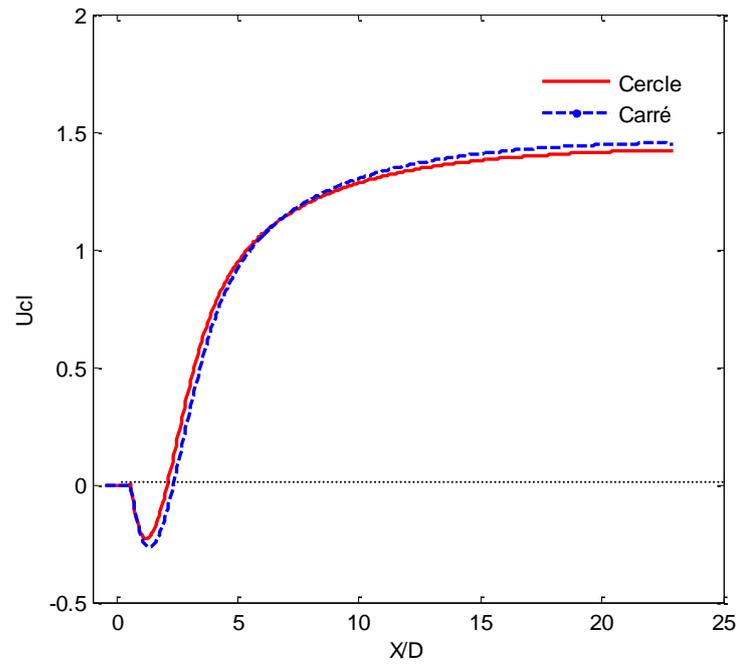
$$U_{cl} = U_{moy}(x, y = 0)/U_m \quad (3.19)$$

avec  $U_{moy}$  la moyenne temporelle de la vitesse et  $U_m$  la vitesse débitante.

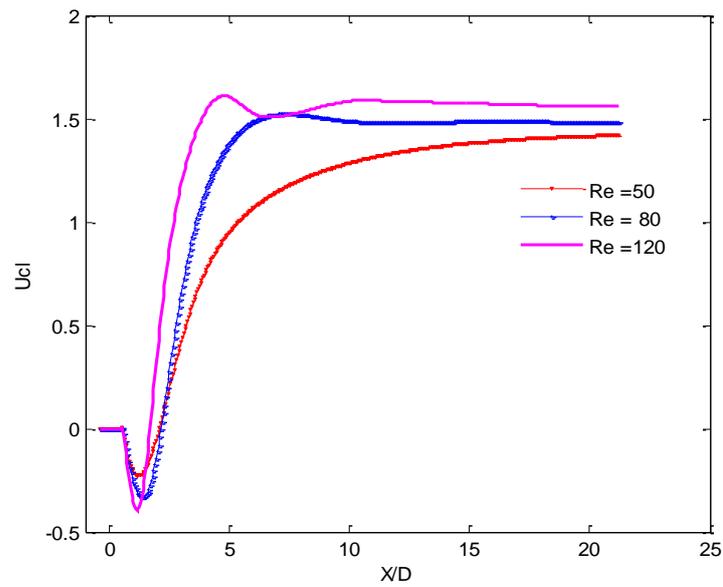
L'axe de symétrie du canal situé à une distance égale à  $3D/2$  à partir de la paroi inférieure du canal est considéré comme étant l'origine du repère cartésien du canal  $y = 0$ .

La figure (3.23), met en évidence l'évolution de la vitesse de la ligne centrale pour les deux types d'obstacle à un nombre de Reynolds  $Re = 50$ . La longueur de recirculation  $Lr$  est la distance de l'obstacle à laquelle la vitesse s'annule  $U_{cl}(x = l) = 0$ .

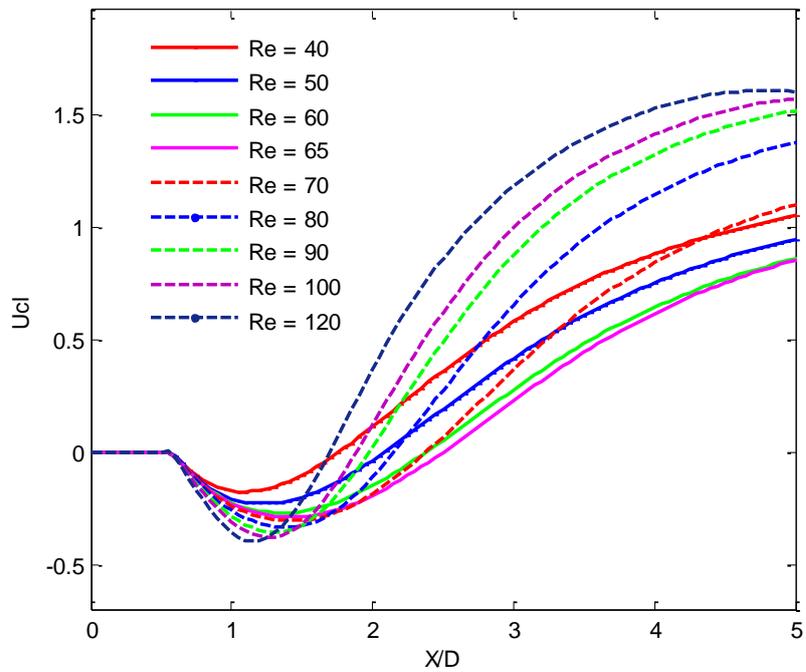
Cette figure montre des allures similaires de l'évolution de la ligne centrale de vitesse pour les deux obstacles carrés et circulaire. Par ailleurs, un léger décalage entre les deux courbes est observé qui se traduit une différence des longueurs de recirculation. En relevant, dans ce cas, les valeurs des longueurs de recirculation on trouve  $L_{rcarré} = 2.27D$  et  $L_{rcercle} = 2.05D$  qui correspond bien à la valeur expérimentale trouvée par Rehim (2006) ( $L_{rcercle} \approx 2D$ ) dans le cas d'un obstacle circulaire. La figure (3.24) montre l'évolution de la vitesse de la ligne centrale pour  $Re = 50$ ,  $Re = 80$  et  $Re = 120$  dans le cas de l'écoulement autour d'un obstacle circulaire. Sur la figure (3.25), la vitesse sur la ligne centrale est présentée dans une zone zoomée proche de l'obstacle pour différents nombre de Reynolds. Ces différentes courbe montre bien le comportement de la vitesse  $U_{cl}$  avant et après le Reynolds critique (Lignes interrompu : Régime de recirculation et lignes continu : Régime oscillatoire). Ceci est bien mis en évidence vitesse en relavant les valeurs des longueurs de recirculation pour ces différents nombres de Reynolds.



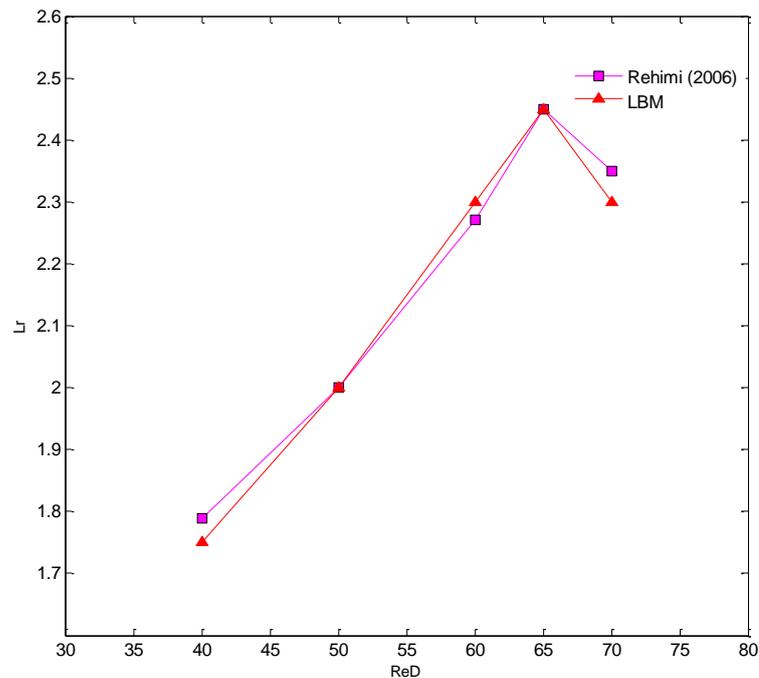
**Figure 3.23 :** Profil de la vitesse le long de la ligne centrale pour les deux types d'obstacles.



**Figure 3.24 :** Profil de la vitesse de la ligne centrale dans le cas d'une géométrie circulaire de l'obstacle



**Figure 3.25 :** Profil de la vitesse le long de la ligne centrale pour différents nombres de Reynolds dans la zone proche obstacle



**Figure 3.26 :** Variation de la longueur de recirculation moyenne  $L_r$  (adimensionné par  $D$ ) en fonction du nombre de  $Re$  (Obstacle circulaire)

La comparaison des résultats obtenus concernant la longueur de recirculation en fonction du nombre de Reynolds obtenus par la LBM avec ceux obtenus expérimentalement par Rehimi (2006) dans le cas d'un écoulement autour d'un obstacle circulaire montrent un bon accord. La variation de la courbe (figure 3.26) prend deux allures différentes.

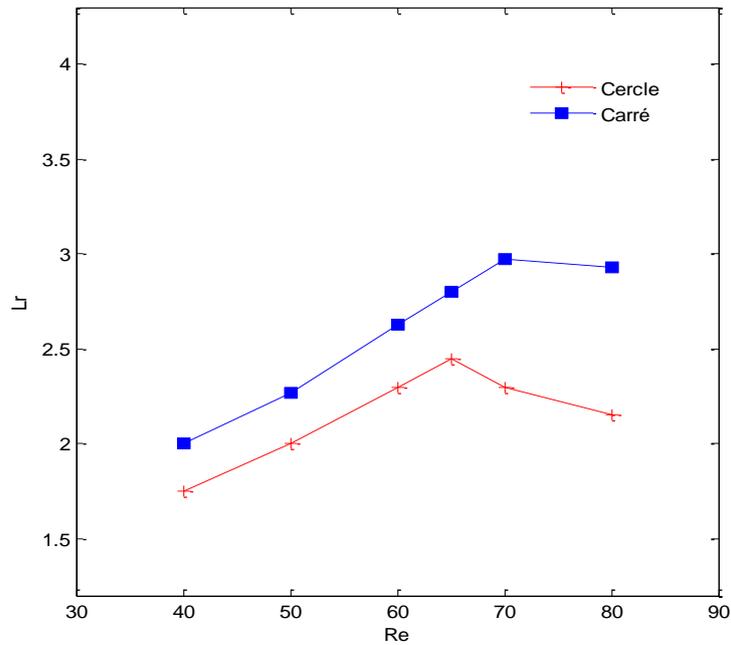
Pour une première plage de Reynolds la longueur de recirculation en fonction du Reynolds est une droite affine croissante. Pour cette gamme de Reynolds, l'écoulement est en régime de

recirculation, la courbe est limitée par un maximum correspondant au Reynolds critique  $Re = 67$  analogue à celui obtenu par Rehimy (2006). Au-delà du nombre de Reynolds critique, le régime longueur de recirculation décroît en fonction de Reynolds.

La figure (3.27) illustre une comparaison de la longueur de recirculation moyenne obtenue par LBM pour les deux types d'obstacles. Les résultats montrent que la longueur de recirculation dans le cas d'un obstacle carré est supérieure à celle dans le cas d'un obstacle circulaire. La taille des tourbillons développés en aval du carré est plus importante que celle des tourbillons en aval d'un obstacle circulaire. Le régime de recirculation dans le cas de l'obstacle carré est légèrement plus prolongé que celui dans le cas d'un obstacle circulaire. Les premiers lâchés tourbillonnaires commencent à se manifester, dans le cas d'un obstacle carré, à partir d'un Reynolds critique  $Re = 72$ .

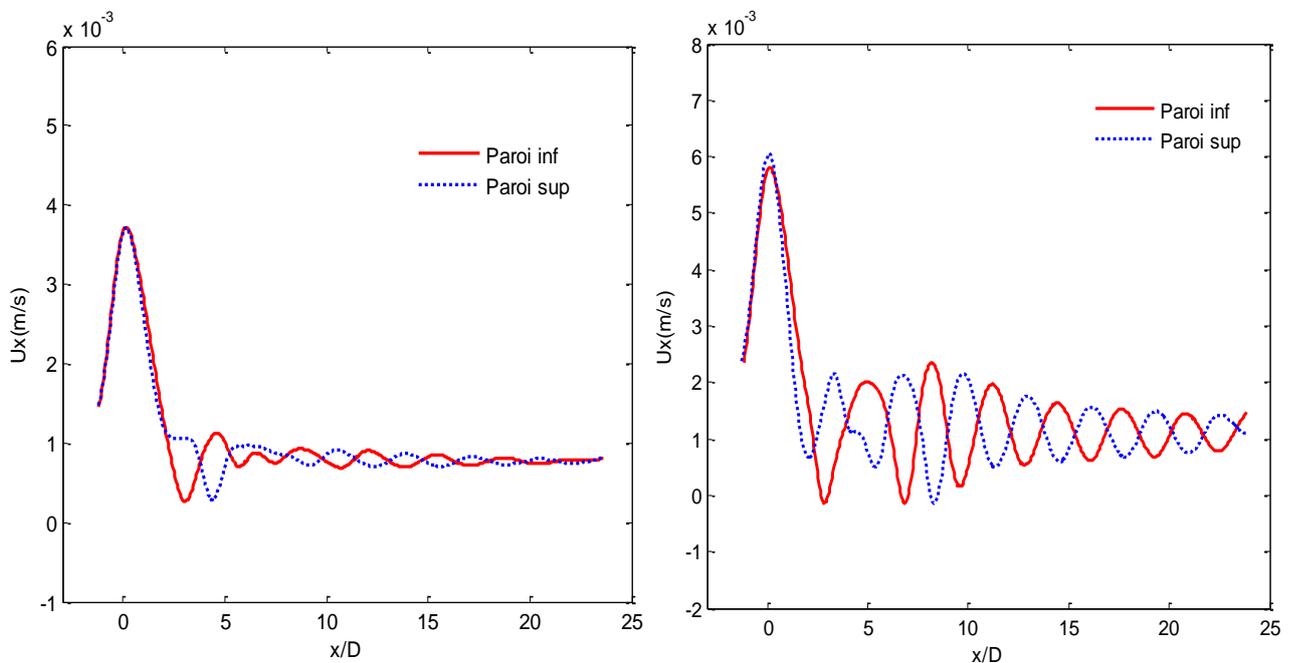
Pour un nombre de Reynolds  $Re = 80$ , supérieure au Reynolds critique le sillage de l'obstacle circulaire adopte un comportement oscillatoire instationnaire. Les deux tourbillons contrarotatifs perdent leurs symétrie par rapport à l'axe longitudinal et commencent à se détacher formant ainsi les premier lâchées tourbillonnaire. Les lignes de courant illustrées par la figure (3.22-c) montrent la déformation des tourbillons en aval de l'obstacle au niveau du régime oscillatoire.

Pour un nombre de Reynolds plus important  $Re = 120$  les résultats de simulation numérique montre un sillage plus perturbé caractérisé par des instabilités plus importantes (Figure 3.21).

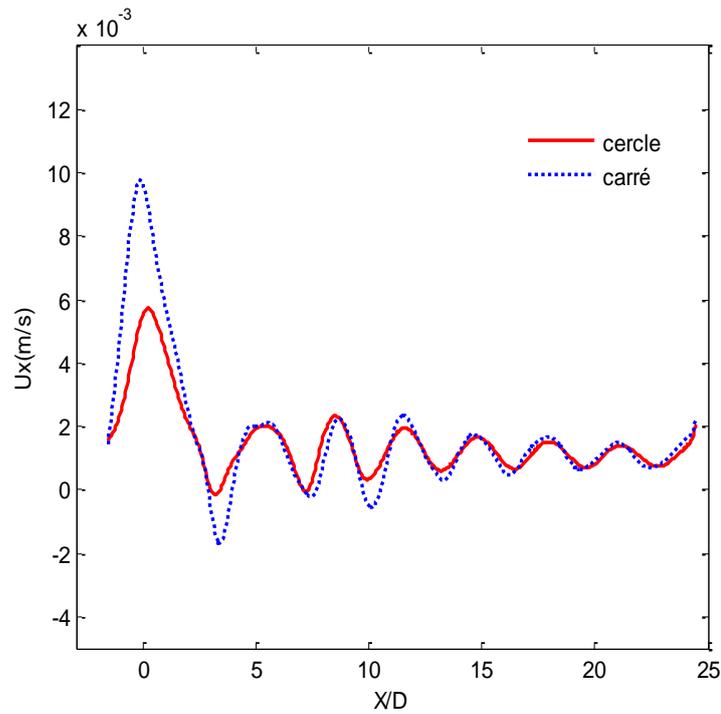


**Figure 3.27 :** Variation de la longueur de recirculation moyenne  $L_r$  (adimensionné par le diamètre) en fonction du nombre de  $Re$  dans le cas d'un obstacle carré et d'un obstacle circulaire

La figure (3.28) présente la vitesse longitudinale (à un instant  $t$ ) au niveau des zones proches de la paroi supérieure et de la paroi inférieure et montre des oscillations qui s'amortissent en s'éloignant de l'obstacle.



**Figure 3.28 :** Profils instantanés de la vitesse axiale le long des parois supérieure et inférieure du canal pour deux Reynolds différents : a)  $Re=80$  ; b)  $Re=120$



**Figure 3.29** : Profils instantanés de vitesse axiale le long des parois inférieure du canal dans le cas d'un obstacle carré et circulaire pour  $Re=120$  (distance  $\Delta y$  par rapport à la paroi)

Une comparaison des vitesses longitudinales obtenues pour les deux types d'obstacles, au voisinage de la paroi inférieure du canal à une distance  $= \Delta y$  (1<sup>er</sup> nœud), est illustrée par la figure (3.29). Cette comparaison montre une similarité au niveau de l'allure et des oscillations obtenues. Par ailleurs, au niveau de la zone proche de l'emplacement de l'obstacle le pic de vitesse dans le cas de l'obstacle carré est supérieur à celui obtenu dans le cas d'un obstacle circulaire. Ceci peut être expliqué par la présence des arêtes dans le cas d'un obstacle carré provoquant une obstruction brusque de l'écoulement contrairement au cas d'un obstacle circulaire où elle est progressive. Étant donné que le débit est conservé, la vitesse est plus importante dans la zone proche paroi pour le cas d'un carré.

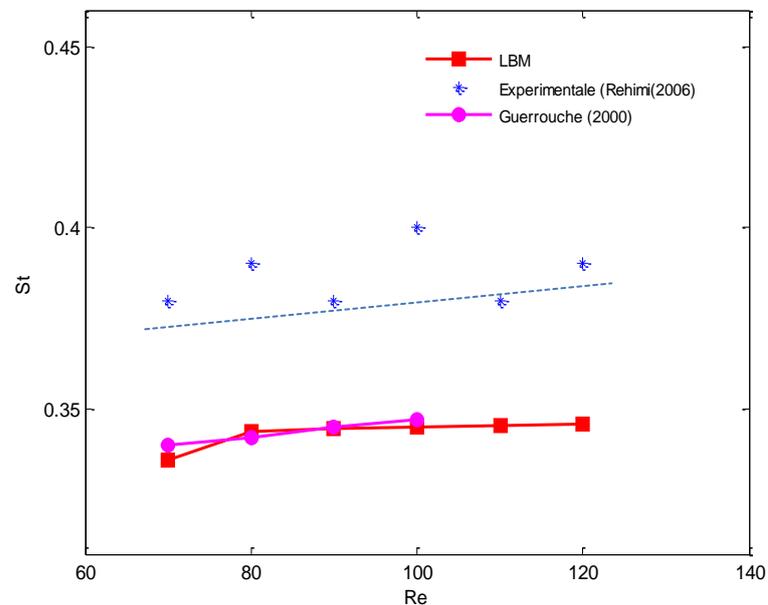
Les instabilités développées au niveau du sillage pour cette gamme de nombre de Reynolds sont de nature bidimensionnelle et caractérisées par une périodicité fortement prononcée.

L'analyse spectrale à l'aide de la transformée de Fourier rapide de l'évolution temporelle de la vitesse en un point particulier du sillage présente un pic important à la fréquence du lâchés tourbillonnaire. Cette fréquence noté  $f_s$ , adimensionné par la vitesse débitante et le diamètre de l'obstacle donne un paramètre caractéristique de l'écoulement qui est le nombre de Strouhal défini par :  $St = \frac{f_s D}{U}$ .

La figure (3.30) montre la variation en fonction du nombre de Reynolds, du nombre de Strouhal obtenu numériquement par la méthode LB comparée aux résultats numériques de Guerrouache

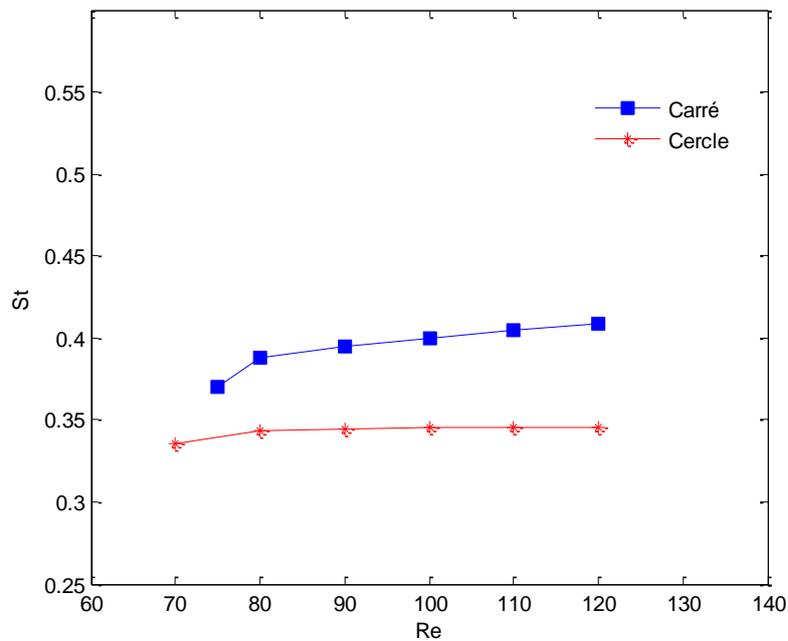
(2000) et les résultats expérimentaux de Rehim (2006) pour une même configuration géométrique.

Les résultats obtenus montrent une évolution quasi-croissante du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds. Les résultats LBM sont en très bon accord avec les résultats numériques obtenu par Guerrouche (2000) pour une gamme de nombres de Reynolds allant de  $Re=70$  à  $Re=100$ .



**Figure 3.30** : Évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds pour un obstacle circulaire

Cependant un écart est remarqué par rapport aux résultats expérimentaux de Rehim (2006) qui peut être dû aux effets tridimensionnels du canal hydraulique. La figure 3.31 illustre une comparaison de l'évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds dans le cas de l'obstacle carré et de l'obstacle circulaire. Il ressort des résultats obtenus que les fréquences de détachements tourbillonnaires dans le cas d'un obstacle carré sont supérieures à celles obtenues dans le sillage d'un obstacle circulaire.



**Figure 3.31** : Évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds pour un obstacle circulaire et un obstacle carré

### 3.2.3.2.2 Influence des paramètres LB

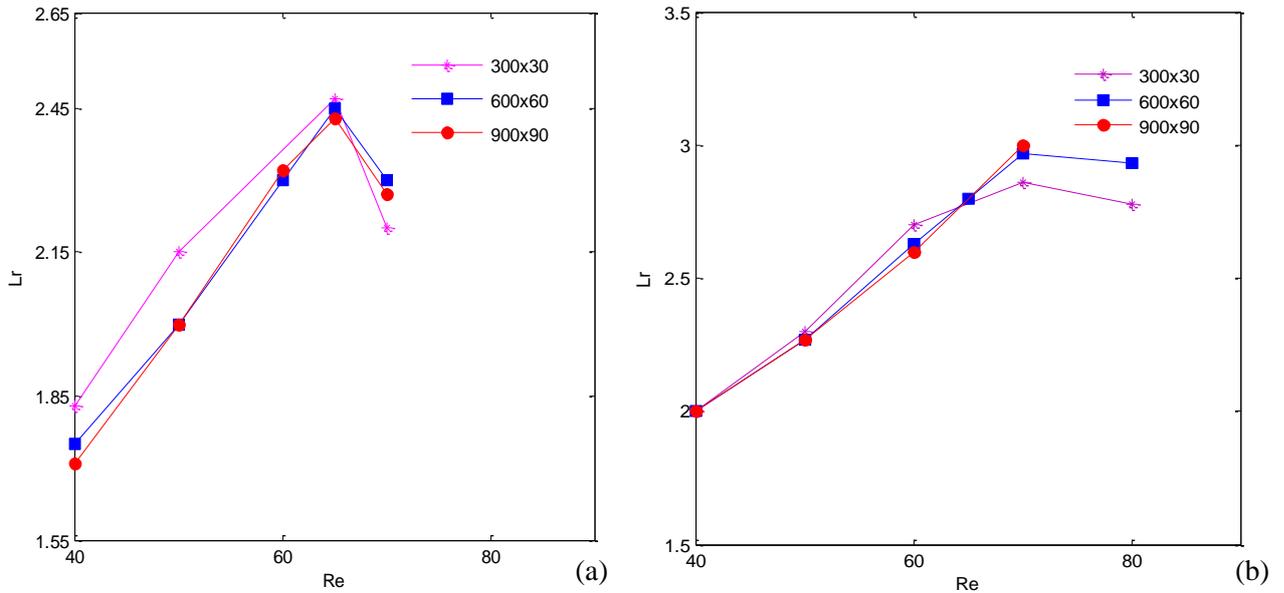
La performance de la LBM, en termes de précision des résultats de simulation obtenus, est conditionnée par plusieurs facteurs propres à la méthode elle-même. L'influence de la variation de la résolution de la grille de calcul a été investiguée au niveau de cette partie.

#### Influence de la taille de la grille de calcul

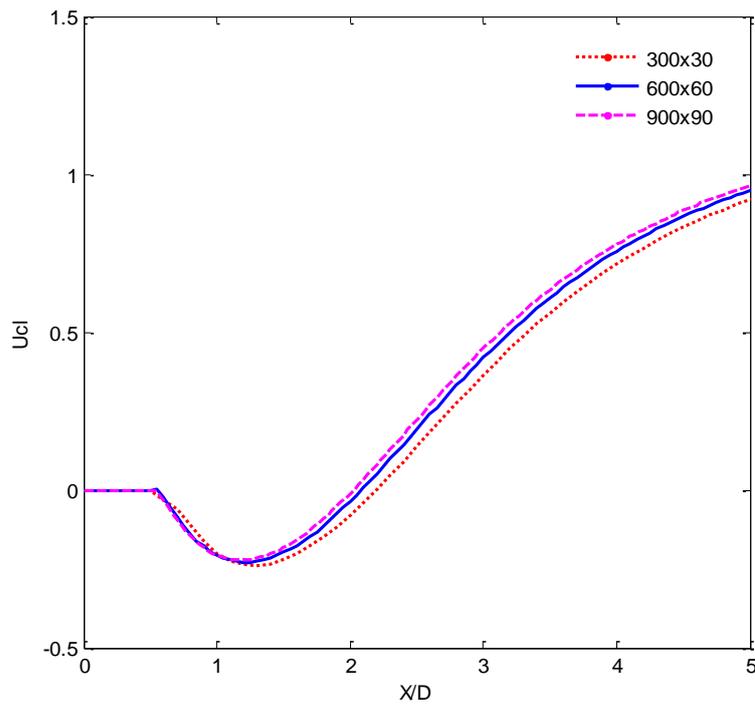
Les calculs sont effectués en utilisant trois grilles différentes :  $300 \times 30$ ,  $600 \times 60$  et  $900 \times 90$ .

Les figures 3.32 illustrent la variation de la longueur de recirculation moyenne en fonction du nombre de Reynolds obtenue en utilisant les trois grilles dans le cas d'un obstacle circulaire et d'un obstacle carré. Nous constatons que, pour des grilles de taille supérieure à  $600 \times 60$  la longueur de recirculation moyenne devient insensible à la taille de la grille.

Le profil de vitesse sur la ligne centrale de la zone aval proche de l'obstacle circulaire pour trois grilles de dimensions différentes est présenté par la figure (3.33). Là aussi nous constatons, que pour des dimensions de la grille supérieures à  $600 \times 60$ , la vitesse devient insensible aux dimensions de la grille.

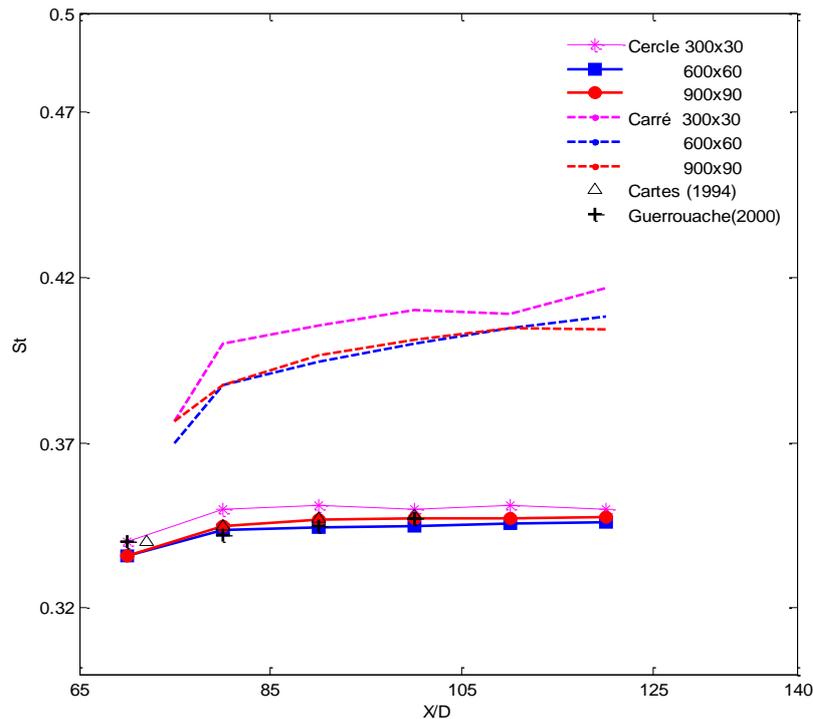


**Figure 3.32 :** Évolution de la longueur de recirculation moyenne  $L_r$  en fonction du nombre de  $Re$  pour trois tailles de grilles différentes : a) cas d'un obstacle circulaire ; b) cas d'un obstacle carré



**Figure 3.33 :** Profil de vitesse sur la ligne centrale horizontale du canal pour trois grilles de tailles différentes dans le cas d'un obstacle de géométrie circulaire  $Re=50$

L'effet des dimensions des grilles sur la variation du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds est présenté par la figure 3.34. Pour les deux types d'obstacle, nous constatons, que pour des dimensions de la grille supérieure à 600x60, le nombre de Strouhal devient insensible aux dimensions de la grille.



**Figure 3.34 :** Évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds pour trois tailles de grilles différentes dans le cas d’une géométrie circulaire et carré de l’obstacle comparée aux résultats numériques de Cartes(1994) et de Guerrouache (2000)

Par ailleurs, la taille de la grille de calcul adoptée a un grand effet sur le temps de calcul. Le tableau 6 récapitule les durées du calcul requises pour les trois grilles considérées. La recherche d’un compromis entre précision et temps de calcul s’avère alors nécessaire.

Nombre Total de nœuds	Nombre de nœuds sur l’obstacle	dx	Temps CPU/itération	Temps CPU /seconde d’écoulement
300x30	10	0,1D	0,018	1,084
600x60	20	0,05D	0,044	8,817
900x90	30	0,033D	0,1134	51,08

**Tableau 6 :** Grilles utilisées pour les simulations LBM et temps de calcul

Dans notre cas nous avons adoptés une grille régulière de taille 600x60 présentant d’une part, des résultats numériques assez précis et un temps de calcul relativement court (0,044s/itération).

### 3.2.4 Simulation numérique de l'écoulement tridimensionnel autour d'un barreau dans un milieu confiné

Nous présentons au cours de cette partie, les résultats de la simulation numérique d'un écoulement tridimensionnel autour d'un barreau horizontal. Un modèle Lattice D3Q19 présenté dans la figure (3.1) a été adopté. Les vecteurs vitesses correspondantes sont présentées dans le tableau 3 au début de ce chapitre.

#### 3.2.4.1 Configuration géométrique du problème

Le domaine de calcul dans la configuration tridimensionnelle étudiée est défini par les dimensions ( $0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z$ ). Une grille régulière ( $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ ) d'une taille totale de nœuds  $N_x \times N_y \times N_z = 600 \times 60 \times 90$  nœuds est adoptée.

Notre étude sera menée pour un rapport de confinement de  $r = 1/3$ . Pareillement au cas bidimensionnel étudié précédemment, l'étude des régimes d'écoulement sera basée uniquement sur le nombre de Reynolds, basé sur la hauteur du barreau et la vitesse moyenne à l'entrée du canal  $Re = \frac{U_m D}{\nu}$ . Les conditions aux limites présentées dans la configuration bidimensionnelle sont conservées. Un profil de vitesse parabolique est imposé à l'entrée du canal et l'hypothèse d'écoulement non-glissant est appliquée aux parois du canal et du barreau immobile. La figure 3.35 présente le schéma de la configuration géométrique tridimensionnelle du problème étudié.

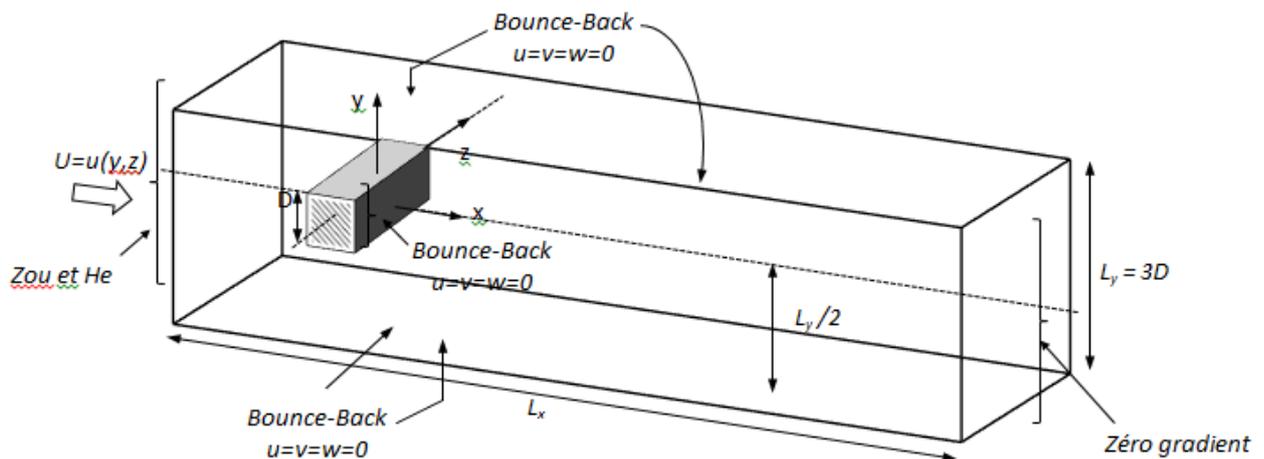


Figure 3.35 : Configuration géométrique tridimensionnelle du problème

### 3.2.4.2 Résultats LBM

La démarche de résolution par la méthode Lattice Boltzmann adoptée précédemment dans le cas d'une configuration bidimensionnelle est conservée. L'algorithme de calcul présenté sur le tableau 9 reste valable en ajoutant la composante azimutale  $z$ .

#### 3.2.4.2.1 Ecoulement dans un canal sans obstacle

Dans un premier temps, nous avons effectué des simulations numériques d'un écoulement dans un canal en absence de l'obstacle. Théoriquement, la solution analytique d'un écoulement établi dans une conduite de section rectangulaire de dimension  $2a \times 2b$  se présente sous la forme suivante (Lundgren et Sparrow, 1964) :

$$u(y, z) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} \left[ b^2 - (y - b)^2 + \frac{4}{b} \sum_{i=0}^{i=\infty} \left( (-1)^{i+1} \frac{\cosh(N_i z) \cos(N_i(y - b))}{N_i^3 \cosh(N_i a)} \right) \right] \quad (3.20)$$

$$\begin{cases} N_i = \frac{(2i + 1)\pi}{2b} \text{ et } 0 \leq i \leq \infty \\ -\frac{dP}{dx} = \frac{4ab\mu U_d}{\frac{4}{3}ab^3} - \frac{8}{b} \sum_{i=0}^{i=\infty} (N_i^5 \tanh(N_i a)) \end{cases} \quad (3.21)$$

où  $U_d$  est la vitesse débitante

Une expression plus simple du profil de vitesse d'un écoulement dans un canal en absence d'obstacle est proposée par Natarajan et Lakshmanan (1972) :

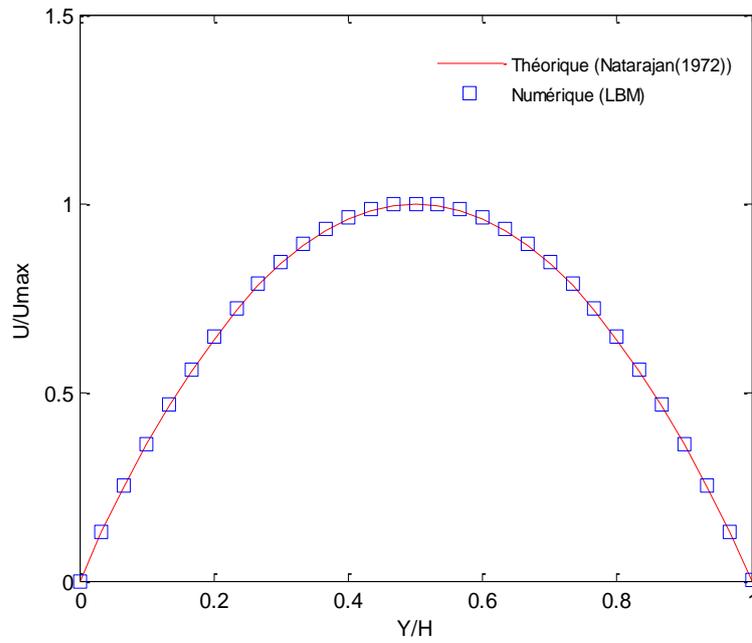
$$\frac{U}{U_{max}} = \left[ 1 - \left( \frac{y}{b} - 1 \right)^2 \right] \left[ 1 - \left| \frac{z}{a} - 1 \right|^m \right] \quad (3.22)$$

où  $m$  est un facteur qui dépend des dimensions du canal tel que  $m = 1,7 + 0,5 \left( \frac{b}{a} \right)^{-1,4}$

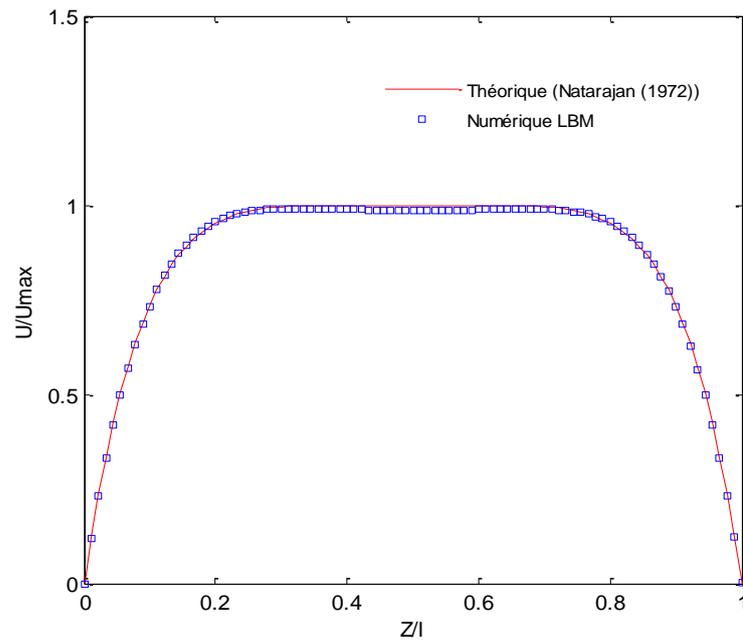
Nous utiliserons ainsi cette équation (3.22) afin de valider nos résultats numériques LB.

Le nombre de Reynolds relatif à la hauteur du canal est  $Re = \frac{U_0 h}{\nu} = 80$ . La viscosité cinématique du fluide est prise  $\nu = 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ . Pour le choix du temps de relaxation on s'est appuyé sur la première partie de ce chapitre soit  $\tau = 0,56$ . Les dimensions physiques du canal une hauteur  $h = 0,03 \text{m}$ , une longueur  $L = 0,6 \text{m}$  et une largeur  $l = 0,1 \text{m}$ .

Les résultats de la simulation numérique obtenus concernant la vitesse de l'écoulement sont présentés par les figures (3.36) et (3.37).



**Figure 3.36 :** Profil de la composante  $U_x$  de vitesse sur la section centrale verticale du canal ( $Z=0$ ) à  $X=L/2$   
 Les profils de la vitesse obtenus numériquement présentent une bonne concordance avec ceux obtenus analytiquement.



**Figure 3.37 :** Profil de la composante  $U_x$  de vitesse sur la section centrale horizontale du canal ( $Y=0$ ) à  $X=L/2$

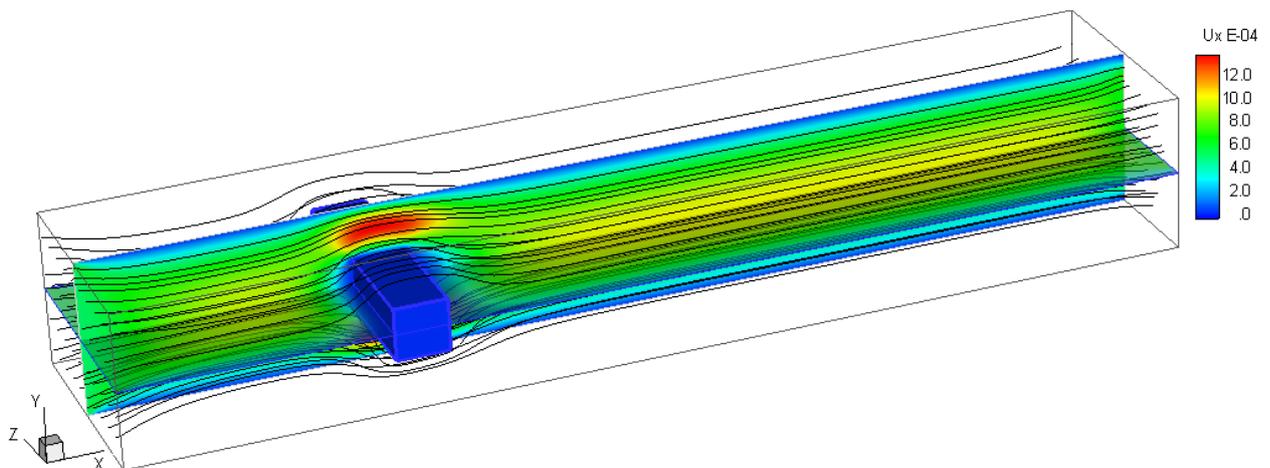
### 3.2.4.2.2 Régimes d'écoulements

A l'issue de l'exécution du code de calcul LBM en configuration tridimensionnelle nous obtenons des fichiers de données des composantes de vitesses  $U$ ,  $V$  et  $W$  en tous point du domaine. Le centre du barreau est considéré comme origine du repère cartésien adopté.

Nous exploitons, tout d'abord, l'évolution des iso-contours de vitesse et des lignes de courant en fonction du nombre de Reynolds. L'objectif de cette cartographie du sillage, est de pouvoir délimiter les différents régimes de l'écoulement et de représenter ainsi le comportement dynamique du fluide en tenant compte des effets tridimensionnels. Une comparaison avec les résultats de la simulation bidimensionnelle obtenus précédemment nous permettra de déterminer les effets tridimensionnels sur l'écoulement.

Nous procédons ainsi par des exécutions du code de calcul pour les mêmes nombres de Reynolds utilisés précédemment dans le cas bidimensionnel, soit  $Re = 5$ ,  $Re = 50$ ,  $Re = 80$  et  $Re = 120$ .

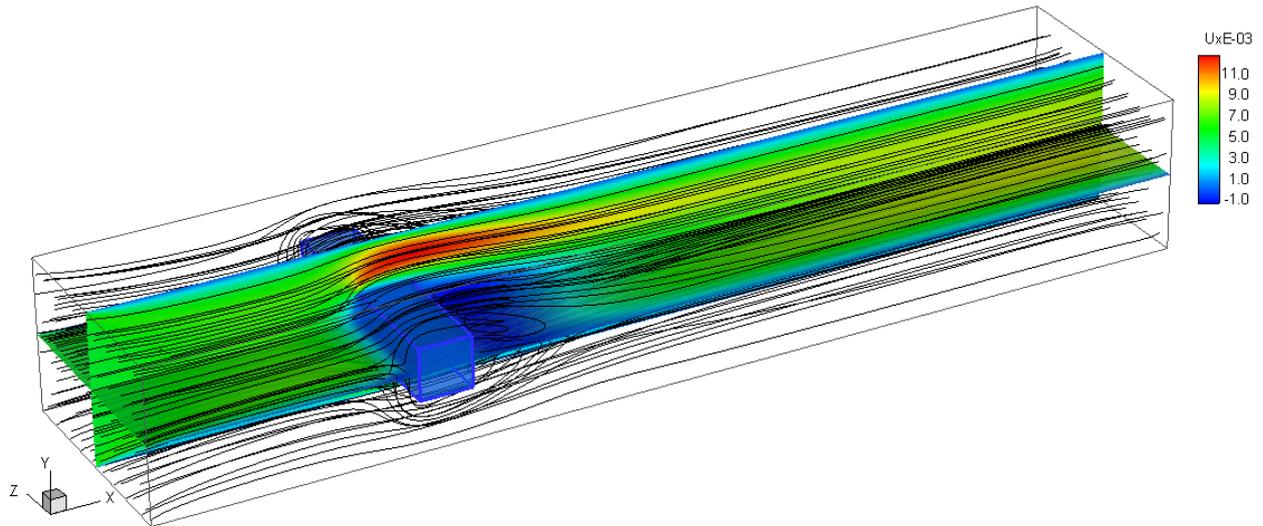
Pour un nombre de Reynolds faible ( $Re = 5$ ), la figure 3.38 présente les contours de la composante axiale de la vitesse dans le canal au niveau de deux coupes perpendiculaires respectivement en  $Y = 0$  et  $Z = 0$ . On remarque un sillage bien stable sur tout le volume du domaine, le régime d'écoulement est rampant. La figure (3.41-a) montre une vue 3D des lignes de courant qui reste collées sur toute la surface du barreau est se referment immédiatement en aval.



**Figure 3.38 :** Contours de la composante  $U_x$  de vitesse sur la section centrale horizontale ( $Y=0$ ) et verticale ( $Z=0$ ) du canal et lignes de courant pour  $Re = 5$

A  $Re = 50$ , les iso-contours de la composante axiale de vitesse, sur le plan  $Z = 0$ , présentés sur la figure (3.39) sont similaires à ceux obtenus pour la configuration bidimensionnelle (figure (3.12)). Une zone de recirculation apparaît du côté aval voisinant le barreau, cependant le sillage garde sa stabilité. Les lignes de courant au voisinage de l'obstacle (figure 3.41-b) mettent bien en évidence la présence des tourbillons contrarotatifs dans cette zone, caractérisant le régime de recirculation.

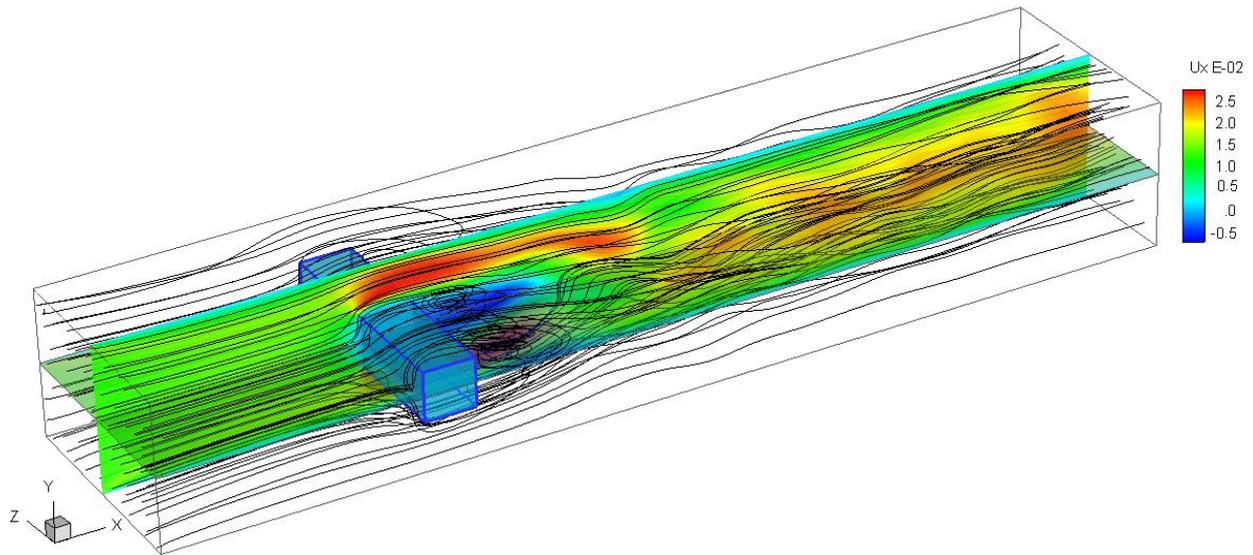
Pour un nombre de Reynolds plus important ( $Re=80$ ), les lâchers tourbillonnaires caractéristiques de l'allée de Von Kármán apparaissent et le sillage commence à osciller. Les lignes de courant présentées sur la figure (3.41-c) montrent un allongement de la zone de recirculation avale de l'obstacle. Ce régime d'écoulement apparaît aux alentours de  $Re=79$  pour cette configuration tridimensionnelle, alors que pour la configuration bidimensionnelle il apparaît à  $Re=72$  dans le cas bidimensionnel. Ce décalage peut être expliqué par la présence de parois latérales qui entraînent un effet retardateur sur l'apparition des instabilités dans le sillage.



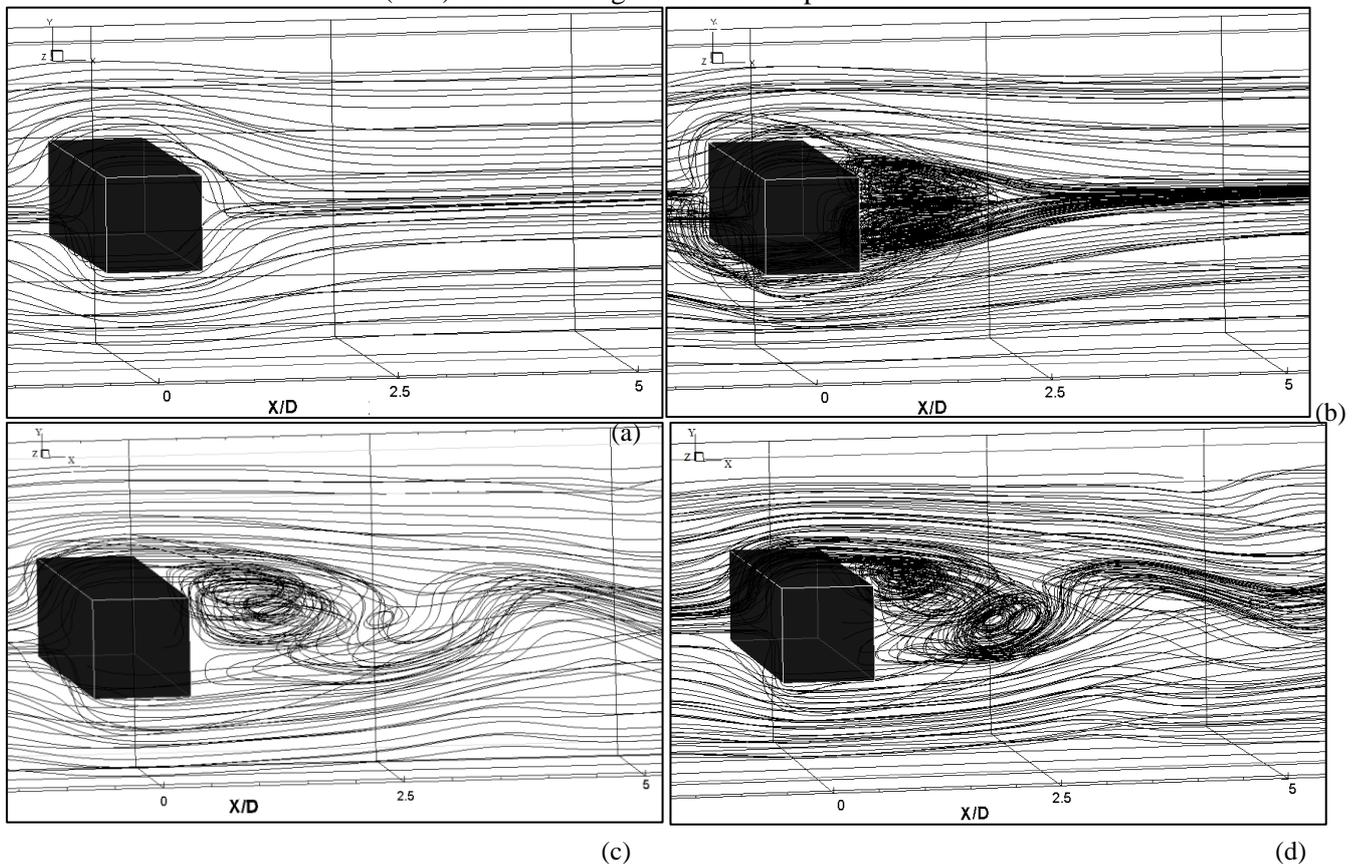
**Figure 3.39** : Contours de la composante  $U_x$  de vitesse sur la section centrale horizontale ( $Y=0$ ) et verticale ( $Z=0$ ) du canal et lignes de courant pour  $Re = 50$

Nous traiterons dans une seconde section l'effet de l'augmentation de la largeur du canal sur la génération et l'évolution des structures dans le sillage du barreau.

L'écoulement devient plus instable pour un nombre de Reynolds plus important ( $Re = 120$ ) et le sillage devient périodique. La figure (3.40) présente les contours de la composante axiale de la vitesse sur les plans  $Y = 0$  et  $Z = 0$  superposée aux lignes de courant tridimensionnelles de l'écoulement.

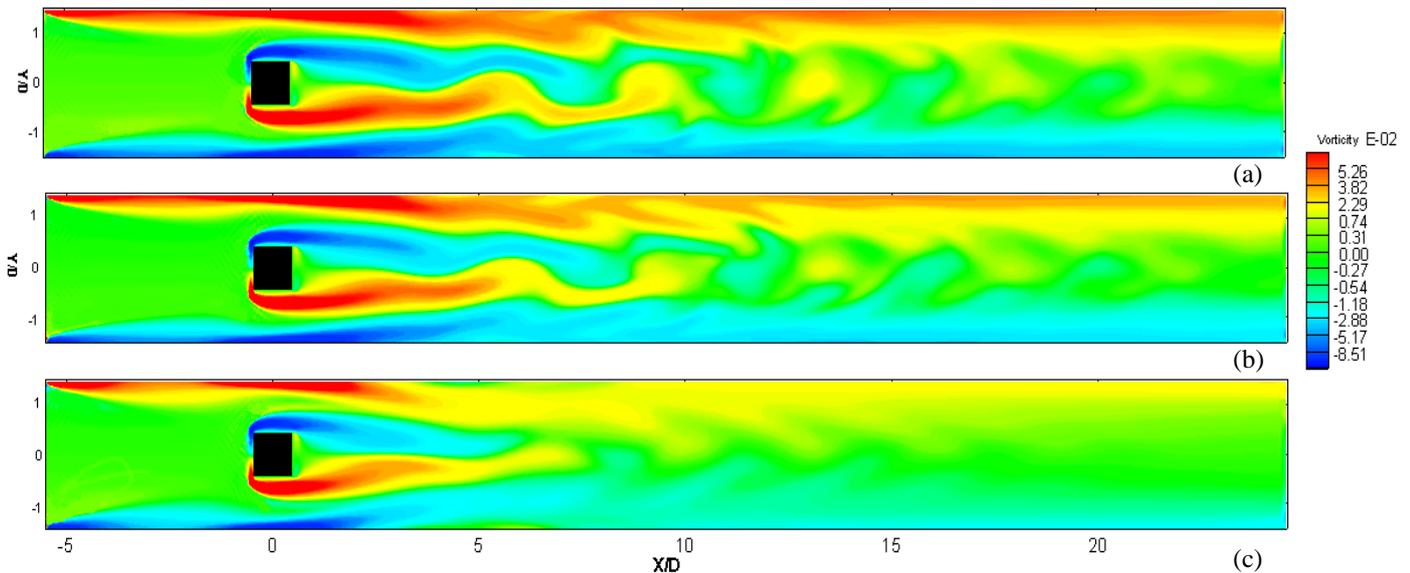


**Figure 3.40** : Contours de la composante  $U_x$  de vitesse sur la section centrale horizontale ( $Y=0$ ) et verticale ( $Z=0$ ) du canal et lignes de courant pour  $Re = 120$



**Figure 3.41** : Lignes de courant autour de l'obstacle circulaire pour différents nombres de Reynolds : a)  $Re = 5$  ; b)  $Re = 50$  ; c)  $Re = 80$  ; d)  $Re = 120$

La représentation des champs de vorticité permet de mieux observer les instabilités dans le sillage du barreau. La figure 3.42 illustre les contours de vorticité sur différentes coupes verticales de l'écoulement. Les instabilités générées par l'obstacle caractérisant l'allée de Von Kármán sont de plus prononcées en se rapprochant du plan central du canal ( $Z=0$ ) (figure 3.42-a). Ceci s'explique par la présence des parois latérales du canal qui confinent l'écoulement.



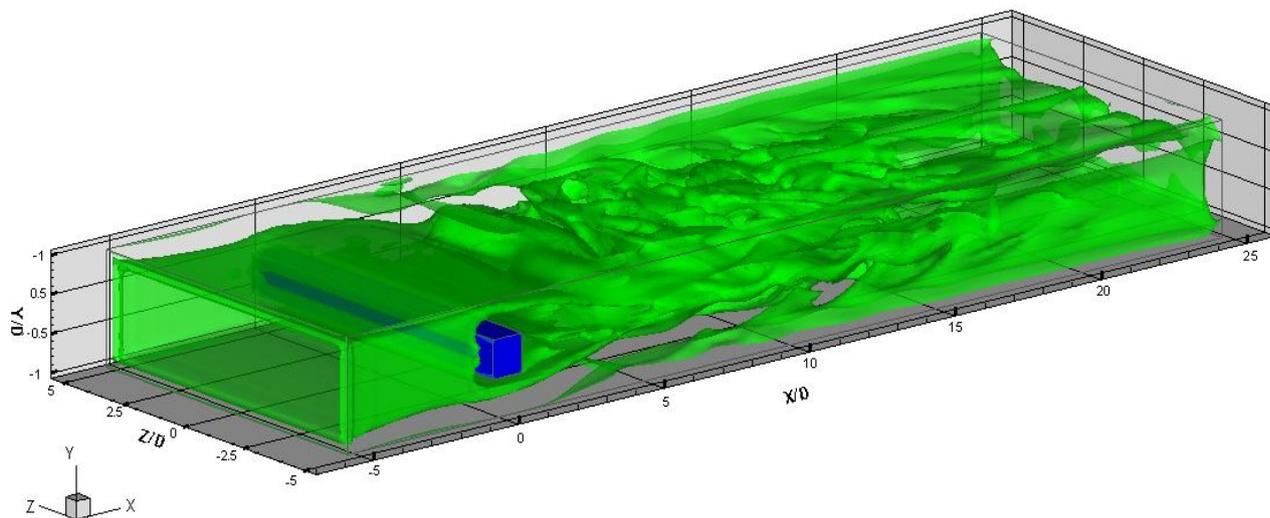
**Figure 3.42** : Iso contours de vorticité sur des coupes verticales de l'écoulement à  $Re = 120$ ; (a) plan  $Y=0$  ; b)  $Y = -1D$  ; c)  $Y = -2D$

La comparaison des champs de vorticité pour une configuration 3D, à ceux obtenus pour le même nombre de Reynolds ( $Re = 120$ ) dans le cas de la configuration 2D (figure (3.14)), met en évidence l'effet de la présence des parois latérales. On remarque bien un sillage moins perturbé, et des lâchées tourbillonnaires moins décelables que ceux obtenus dans la configuration bidimensionnelle. A cet effet, nous avons étudié l'influence de la largeur du canal sur les instabilités générées dans le sillage du barreau horizontal.

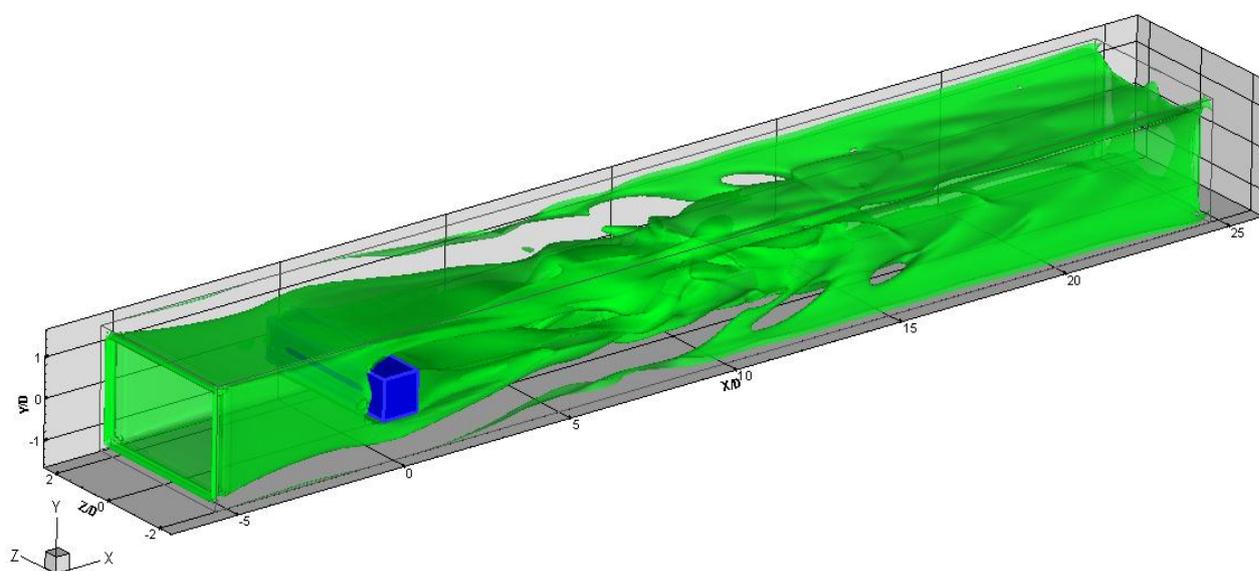
### 3.2.4.2.3 Effet des parois latérales

Les figures 3.43 et 3.44 présentent une vue en perspective des iso-surfaces du champ de vorticité obtenues à un nombre de Reynolds  $Re = 120$  pour deux configurations différentes : largeur  $l_1 = 3H$  et  $l_2 = 1,5 H$  où  $H$  est la hauteur du canal qui est égale dans les deux cas à  $3D$ .

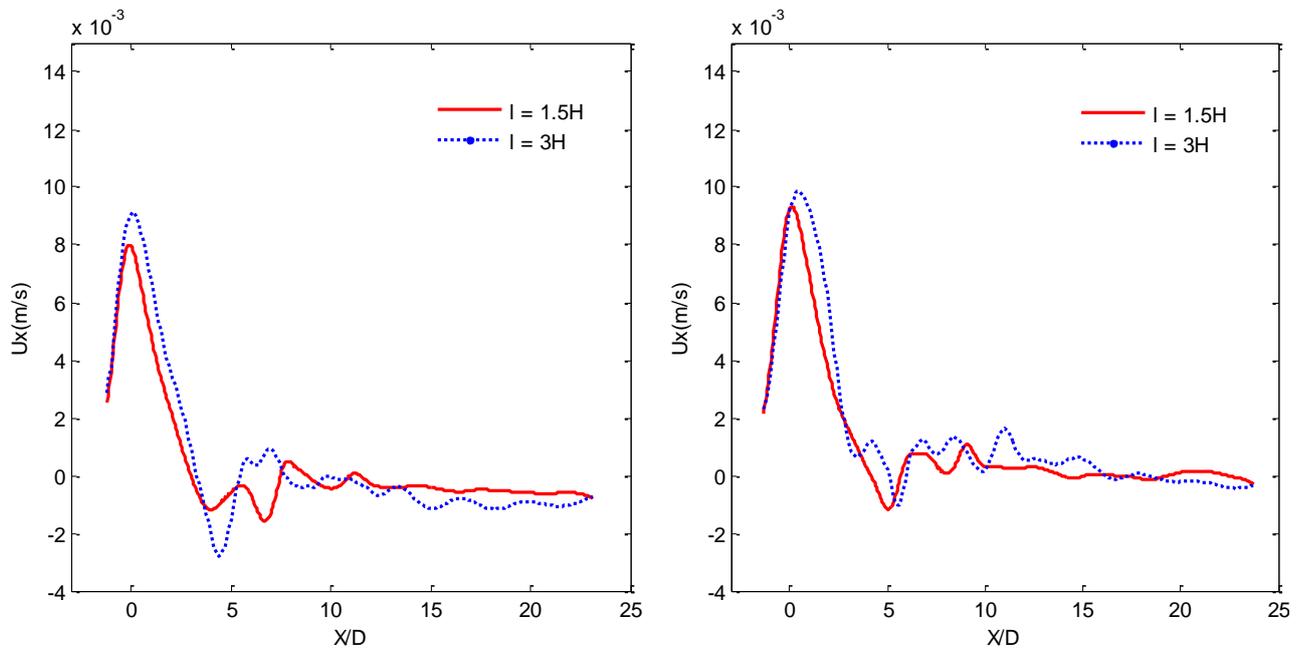
On observe, dans les deux cas, que les instabilités sont générés à la fois par la présence du barreau au niveau de l'axe de l'écoulement et par les différentes parois du canal. Ce n'est pas visible sur les figures. Cependant, la présence de tourbillons secondaires dans le sillage a tendance à comprimer les tourbillons produits par l'obstacle.



**Figure 3.43** : Iso-surface de vorticité à  $Re = 120$  : Largeur du canal  $l_1 = 3H$



**Figure 3.44** : Iso-surface de vorticité à  $Re = 120$  : Largeur du canal  $l_2 = 1.5H$



**Figure 3.45** Profils instantanés de vitesse axiale pour deux largeurs de canal différentes au point le plus proche des parois à  $Re = 120$  : a) paroi supérieure ; b) paroi inférieure

Par conséquent, en diminuant la largeur du canal, la taille des tourbillons dans le sillage est moins importante et le sillage est moins agité. Ceci peut être aussi constaté en analysant les profils des composantes de la vitesse.

Les profils instantanés de la vitesse pariétale au voisinage de la paroi inférieure ( $Z = 0$  et  $Y = j_{\min} + 1$ ) et de la paroi supérieure ( $Z = 0$ ,  $Y = j_{\max} + 1$  (1<sup>er</sup> nœud à partir de la paroi soit une distance =  $\Delta y$ ) du canal sont présentés par la figure 3.45 pour les deux largeurs du canal. Nous constatons que pour le canal le plus large, le profil de la vitesse présente des oscillations plus importantes qui s'atténuent moins rapidement.

### 3.2.4.3 Évaluation du temps de calcul

Parmi les critères majeurs du choix d'une méthode de résolution numérique est le temps du calcul. Un des avantages les plus marquants de la méthode Lattice Boltzmann est la rapidité de son temps d'exécution. Ceci a été bien confirmé, précédemment, dans le cas d'une configuration bidimensionnelle. Cependant, le temps d'exécution du code de calcul 3D est largement supérieur à celui du cas bidimensionnel. Plusieurs paramètres interviennent dans la rapidité d'exécution. L'écriture elle-même des différentes fonctions et des routines du code présente un facteur essentiel dans la vitesse de calcul. Outre, les caractéristiques de la machine de calcul et des processeurs utilisés ou encore la taille des adoptées.

Dans notre cas, afin d'étudier deux largeurs différentes du canal, deux grilles de tailles différentes sont alors adoptées:  $600 \times 60 \times 90$  et  $600 \times 60 \times 180$  correspondant respectivement à une largeur de

canal  $l_2=1,5H$  et  $l_1=3H$ . Le choix de la taille de la grille du calcul s'est basé sur la grille optimale au niveau de la configuration bidimensionnelle étudiée dans la section précédente présentant un bon compromis entre résolution spatiale et temporelle.

Les temps de calculs correspondant sont présentés sur le tableau 7.

Nombre Total de nœuds	Nombre de nœuds sur l'obstacle	dx	Temps CPU/itération	Temps CPU /seconde d'écoulement
600x60x90	20x20x90	0,1D	1.164	129,33
600x60x180	20x20x180	0,1D	2.72	244,4

**Tableau 7 :** Grilles utilisées pour les simulations LBM 3D et temps de calcul nécessaire

La comparaison du temps de calcul obtenu pour la configuration tridimensionnelle par rapport à celle bidimensionnelle (Tableau 6) montre un écart très important des durées de calculs requises.

Le temps nécessaire pour la simulation de l'écoulement dans un canal large est encore plus ample. Ceci s'explique par les boucles de calcul des étapes de la LBM dans les trois directions du domaine ainsi que l'enregistrement des fichiers de données et des valeurs des champs de vitesse très volumineux.

Par ailleurs, on recourt généralement à la parallélisation du code de calcul dans des cas de problèmes complexes. Cette méthode consiste à subdiviser le code global en des différentes sous-tâches qui sont traités séparément. L'algorithme de la LBM est distingué par une structure bien adaptée au calcul parallèle ce qui constitue un avantage primordial de la méthode. Par ailleurs, plusieurs autres avantages mettent en valeur la méthode Lattice Boltzmann, parmi lesquels sa vaste utilisation pour différents type de problème. Nous consacrons la partie suivante à l'étude de l'applicabilité de la LBM dans la simulation numérique d'un autre type de problème autre que la dynamique. Nous proposons ainsi l'étude du phénomène de transfert massique pariétale.

### 3.3 Simulation numérique du transfert massique pariétal

Cette partie est consacrée essentiellement à la présentation de la démarche suivie pour mettre en place un code de calcul basée sur la méthode Lattice Boltzmann pour la simulation numérique du problème de transfert de masse au niveau d'une paroi. L'étude se focalisera tout d'abord sur la simulation d'un problème de transfert sur une zone réduite au niveau d'une paroi inerte. Par la suite, le code de simulation des transferts massiques sera couplé à celui de la simulation de l'écoulement.

Ainsi, l'outil numérique développé sera utilisé pour la simulation du transfert massique pariétal derrière un obstacle et par conséquent de déterminer les interactions entre les tourbillons et les parois.

Les travaux expérimentaux de Delyang (1997) portaient sur le transfert de masse pariétal en aval d'un obstacle placé dans un canal à des rapports de confinement variés. Les mesures de transfert de masse sont relevées au moyen de sondes électrochimiques placées à des positions différentes par rapport à l'obstacle. Les résultats obtenus montrent une forte dépendance du taux de transfert massique pariétal aux différents paramètres de l'écoulement tel que le nombre de Reynolds et le taux de blocage. Nous utiliserons les travaux de Delyang comme référence afin de valider nos résultats numériques.

Nous explicitons, en premier lieu, l'équation Lattice Boltzmann LBE et les conditions aux limites physiques et Lattice spécifiques au problème considéré. Nous présentons, par la suite, l'interface utilisateur permettant l'usage du code de calcul. La seconde partie sera consacrée à la présentation et la discussion des résultats obtenus d'abord pour la simulation du phénomène de transfert pariétal seul ensuite pour la simulation du couplage de l'écoulement et du transfert.

### 3.3.1 Equation de Boltzmann sur réseau pour le transfert de masse

La simulation numérique du problème de transfert consiste à introduire une seconde fonction de distribution notée  $g$  propre au transfert massique. En adoptant le modèle de collision BGK à relaxation simple et en absence de force externe l'équation Lattice Boltzmann projetée sur le réseau D2Q9 s'écrit :

$$g_{\alpha}(x + e_{\alpha}\delta t, t + \delta t) = \left(1 - \frac{1}{\tau_d}\right) g_{\alpha}(x, t) + \frac{1}{\tau_d} g_{\alpha}^{eq}(x, t) \quad (3.23)$$

où  $\alpha = 0, \dots, 8$  désigne la direction du réseau.

Cependant, la différence par rapport à la simulation de l'écoulement réside au niveau de la fonction de distribution à l'équilibre. La démarche suivie permettant d'obtenir l'équation de convection-diffusion à partir de l'équation de Boltzmann a été explicitée au cours du premier chapitre. La nouvelle fonction d'équilibre adapté au problème de transfert s'écrit :

$$g_{\alpha}^{eq}(x, t) = C w_{\alpha} \left[1 + \frac{e_{\alpha} \cdot u}{c_s^2}\right] \quad (3.24)$$

La nouvelle expression de la fonction d'équilibre est de premier ordre en vitesse afin de pouvoir retrouver l'équation de convection diffusion. Le paramètre noté par  $C$  désigne la concentration des espèces qui s'exprime en fonction de la fonction de distribution  $g$  par :

$$C = \sum_{\alpha=0}^8 g_{\alpha} \quad (3.25)$$

Cependant, le temps de relaxation relatif au transfert de masse  $\tau_d$  et différent de celui relatif à l'écoulement  $\tau$ . Son expression est issue du coefficient de diffusion massique  $D$  :

$$\tau_d = D \frac{\Delta t}{c_s^2 \Delta x^2} + \frac{1}{2} \text{ avec } c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Les différents paramètres définissant le réseau D2Q9 utilisé lors de notre étude sont présentés au niveau de la première partie de ce chapitre (Tableau 2). Sur chaque nœud du réseau, il s'agit alors de déterminer les  $N$  fonctions de distributions permettant de calculer ainsi la valeur locale de la concentration macroscopique  $C$ . Les deux étapes caractéristiques de la LBM sont conservées :

L'étape de collision et l'étape de propagation décrite par l'équation suivante :

$$g_\alpha(i + 1, j + 1, t + \Delta t) = g_\alpha(i, j, t + \Delta t) \quad (3.27)$$

Plusieurs approches sont utilisées afin de traiter les conditions aux limites LB correspondant au transfert de masse.

Nous présentons dans ce qui suit, les méthodes de traitement des conditions aux limites utilisées dans notre d'étude.

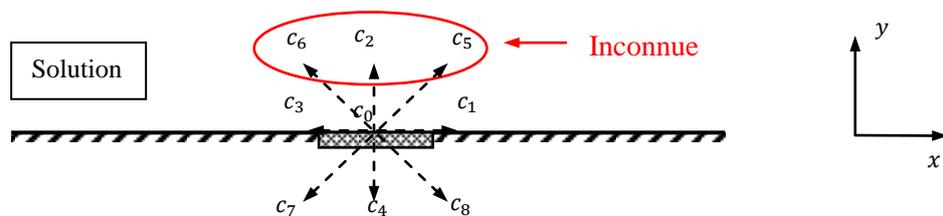
Pour une paroi solide inerte, nous avons considéré l'hypothèse d'un gradient nul. En termes de fonction de distribution cette condition se traduit par l'expression suivante à chaque instant  $t$  :

$$g_\alpha(i, j, t) = g_\alpha(i, j - 1, t) \quad (3.28)$$

Le phénomène de transfert se produit au niveau d'une sonde placée sur une des parois. La concentration à la surface de la sonde est considérée nulle. Afin de modéliser cette condition nous utilisons la méthode anti-Bounce Back (Ginzburg, 2005). Ceci se traduit par l'expression suivante:

$$g_\alpha(i, j, t) = -g_{-\alpha}(i, j, t) \quad (3.29)$$

On considère dans cette étude, une sonde à concentration nulle en surface, placée sur la paroi inférieure d'un canal 2D présentés par le schéma ci-dessous (figure 3.46).



**Figure 3.46** : Anti-Bounce-Back sur la sonde placée sur la paroi sud du canal

A l'issue du processus de propagation, pour chaque nœud de la grille spatiale située sur la sonde (paroi inférieure) ( $l_{min} < i < l_{max}, j = 0$ ), les valeurs des fonctions de distributions dans les directions 4,7 et 8 au niveau sont calculées. Afin de déterminer les fonctions inconnues, on applique le même principe que le « Bounce-Back » mais en affectant un signe négatif aux fonctions de distributions dans les directions opposées. Ainsi, on obtient :

$$f_2 = -f_4, f_5 = -f_7 \text{ et } f_6 = -f_8$$

A la sortie du canal, on appliquera une condition de gradient nul. A l'entrée, connaissant une concentration initiale  $C_0$ , on a utilisé la méthode de Zou-He, décrite précédemment, pour le traitement de cette condition aux limites.

Dans le cas de la simulation simultanée de l'écoulement et du transfert, les conditions aux limites utilisées précédemment pour la simulation de l'écoulement sont conservées.

### 3.3.2 Algorithme de calcul de l'écoulement et du transfert

Les étapes de l'algorithme séquentiel global sont présentées par le tableau 8 ci-après.

<b>Algorithme de Calcul</b>	
1. Définition du problème et entrée des données dynamiques	: $Re, \nu; \Delta x, \Delta y, N_x, N_y, \tau$
2. Définition des données de transfert	: $D$ , longueur de sonde
3. Initialisation des variables macroscopiques	: $C, u, v$
4. <u>Calcul de l'écoulement</u>	: Champs de vitesse calculé sur tout le domaine
- Collision	
- Propagation	
- Traitement des conditions aux limites	
<u>Calcul de la partie transfert</u>	
5. Calcul de la fonction d'équilibre $g_\alpha^{eq}$ en injectant les valeurs de vitesse déjà calculées	$g_\alpha^{eq}(x, t) = Cw_\alpha \left[ 1 + \frac{e_\alpha \cdot u}{c_s^2} \right]$
6. Calcul de l'étape de collision	$g_\alpha^{t+1} = g_\alpha^t \left[ 1 - \frac{1}{\tau_d} \right] + \frac{1}{\tau_d} g_\alpha^{eq}$
7. Etape de propagation (balayage du domaine)	$g_\alpha^{t+1}(i+1, j+1) = g_\alpha^{t+1}(i, j)$
8. Traitement des conditions aux limites	
9. Mise à jour de la concentration macroscopique	
10. Stockage des valeurs calculées	

**Tableau 8** : Schéma de l'algorithme général pour le calcul simultané de la dynamique et du transfert par LBM

### 3.3.3 Interface de dialogue

Le code source LBM pour la simulation du transfert est écrit en langage Fortran-90 et greffé sur le code de la simulation de l'écoulement. Le choix du problème étudié se fait à travers une interface de dialogue utilisateur semblable à celle présentée précédemment dans la partie 3.2.3.1.

Pendant la première étape, l'utilisateur aura le choix de sélectionner trois types de problèmes à simuler : simulation de l'écoulement, simulation du transfert de masse et simulation simultanée des deux phénomènes (écoulement et transfert de masse).

La deuxième étape consiste à introduire les différents paramètres (physiques et numériques) :

```
Choisir le type de probleme :
-----
<0> Simulation dynamique
<1> Simulation transfert
<2> Simulation couplee dynamique-transfert
2
Donner ReD
*****
Donner la viscosite cinematique
*****
Donner la longueur caracteristique(m)          <hauteur de l'obstacle>
*****
Donner le temps de relaxation
*****
Donner la longueur caracteristique(lb)         <hauteur de l'obstacle>
*****
Domaine de calcul
-----
Nbre de noeuds sur la Longueur <lb>:          *****
Nbre de noeuds sur la Hauteur <lb>:          *****
Nombre de points total de la grille =         *****
```

Etape 1

Etape 2

Figure 3.47 : Interface de Dialogue utilisateur : 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> étape choix de l'étude et définition des paramètres du problème

La troisième étape permet la définition de la forme, les dimensions ainsi que l'emplacement de l'obstacle (figure 3.48).

```
Choix de la geometrie de l'obstacle
-----
obj=0 si obst carre,1 si obst rectangulaire et 2 si obst circulaire
2
Donner la position de l'obstacle
Coordonnees centre du cercle
obstx=
*****
obsty=
*****
```

Etape 3

Figure 3.48 : Interface de Dialogue utilisateur : 3<sup>ème</sup> étape choix de la géométrie de l'obstacle

La quatrième étape consiste à définir les paramètres relatifs au problème de transfert. Le coefficient de diffusion, la taille de la sonde ainsi que sa position sont saisie manuellement par l'utilisateur.

Le temps de relaxation relatif au transfert  $\tau_g$  est alors calculé et le nombre de Peclet est affiché (figure 3.49).

```

-----
Parametres transfert
=====
Donner le coefficient de diffusion de la solution
*****
Le temps de relax diffusion = *****
Donner la position de la sonde <lb>
*****
Donner la longueur de la sonde <lb>
*****
Le nombre Peclet = *****

```

*Etape 4*

**Figure 3.49 :** Saisie des paramètres relatifs au transfert de masse

La dernière étape consiste à introduire le temps d'itération maximale et le temps d'échantillonnage relatif à l'enregistrement des fichiers de résultats (Figure 3.50).

```

-----
parametres temps d'iteration
-----
Donner le temps de calcul
Total calcul=
*****
Donner le temps d'echantillonnage=
T_ech=
*****
Debut des calculs...

```

*Etape 5*

**Figure 3.50 :** Définition du temps de calcul et du temps d'échantillonnage

### 3.3.4 Résultats de la simulation numérique par LBM

#### 3.3.4.1 Simulation du transfert pariétal

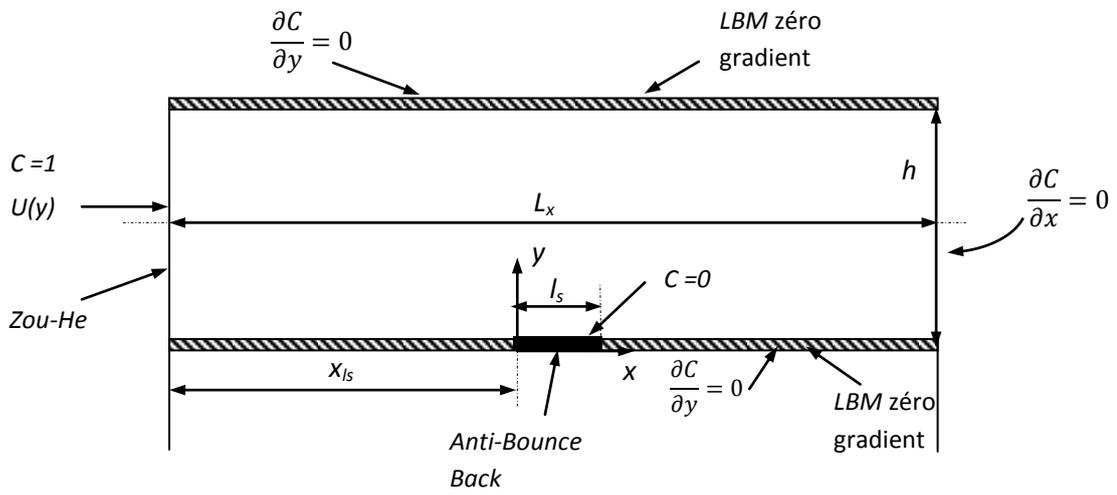
Nous présentons dans cette partie les résultats de simulation numérique d'un problème de transfert massique pariétal bidimensionnel par la méthode LBM.

##### 3.3.4.1.1 Configuration géométrique

Le domaine de calcul pour notre cas d'étude est présenté par la figure 3.51. Les dimensions sont définies tel que ( $0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y$ ). La grille de calcul est constituée d'un maillage régulier et uniforme ( $\Delta x = \Delta y$ ) de dimension  $N_x \times N_y = 1400 \times 200$  nœuds.

Une sonde de longueur  $l_s$  est placée sur la paroi inférieure à une distance  $x l_s$  de l'entrée du canal. Nous avons considéré  $n = 100$  nœuds sur la sonde et une distance  $x l_s = N_x / 2$ . La concentration à la surface de la sonde est nulle et égale à l'unité sur tout le reste du domaine de calcul à l'instant  $t = 0$ .

Un gradient nul de concentration est imposé sur les parois inférieure et supérieure du canal.



**Figure 3.51** : Configuration géométriques et conditions aux limites (physiques et LB) du problème étudié

### 3.3.4.1.2 Solution Analytique de Lévêque et profil de concentration

Pour des nombre de Schmidt  $Sc = \frac{\nu}{D} \gg 1$ , la composante axiale de vitesse  $U_x$  prise dans la couche limite de concentration sous la forme :

$$U_x = Sy \quad \text{avec} \quad S = \left( \frac{\partial U_x}{\partial y} \right)_{y=y_0} \quad (3.30)$$

La composante radiale  $U_y$  peut être déduite de l'équation de continuité dans le cas incompressible  $div(\vec{U}) = 0$ .

L'équation (3.38) s'écrit alors :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + Sy \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{y^2}{2} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} = D \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right] \quad (3.31)$$

En adoptant les hypothèses simplificatrices suivantes:

- L'écoulement est permanent  $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$
- Le gradient pariétal de la vitesse  $S$  est constant
- La diffusion axiale est négligeable  $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$

L'équation (3.31) s'écrit alors :

$$Sy \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (3.32)$$

Le flux massique total sur la sonde s'écrit :

$$\Phi = \int_{sonde} \vec{j} dA_S = D \int_{sonde} \left( \frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=0} dx \quad (3.33)$$

On définit alors le nombre de Sherwood représentant le flux de masse adimensionnel qui s'écrit :

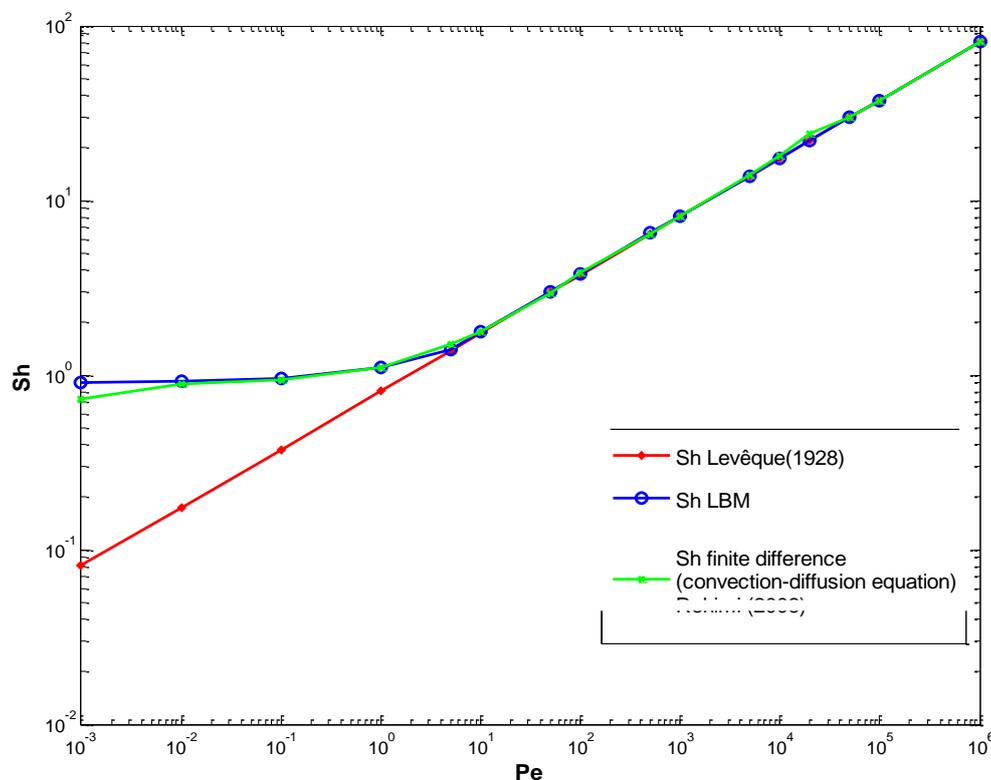
$$Sh(t) = \frac{1}{C_0} \int_0^{l_s} \left( \frac{\partial C(x,y,t)}{\partial y} \right)_{y=0} dx = \int_0^1 \left( \frac{\partial C^*(x,y,t)}{\partial y^*} \right)_{y^*=0} dx^* \quad (3.34)$$

La solution analytique de l'équation (3.32) est appelée solution de Lévêque. D'après cette solution, le nombre de Sherwood s'écrit :

$$Sh(t) = 0,807Pe^{1/3} \quad (3.35)$$

La représentation du nombre de Sherwood en fonction du Peclet dans une échelle logarithmique donne une droite affine de pente  $a = 1/3$ .

Afin de tester la validité de notre code de calcul LBM pour la simulation du transfert de masse, nous avons présenté. Une comparaison entre nos résultats numériques avec ceux donnés par la solution analytique et obtenus numériquement en utilisant la méthode des volumes finies par Rehim (2006), est donnée dans la figure 3.52.



**Figure 3.52 :** Variation du nombre de Sherwood en fonction du nombre de Peclet  $Pe$  ( $10^{-3} < Pe < 10^6$ ).

Pour des nombres de Peclet supérieurs à 50, nos solutions numériques et ceux de Rehim sont très proches des solutions analytiques de Lévêque. Par ailleurs pour des Peclet plus petits, nos solutions numériques sont très proches des solutions numériques obtenues par Rehim et s'écartent beaucoup des solutions analytiques de Lévêque.

Ceci s'explique par le fait que la diffusion axiale n'est plus négligeable pour des faibles nombre de Peclet. Dans la littérature, plusieurs travaux tant que numériques qu'expérimentales qui se sont focalisés sur ce sujet. Cognet (1968) a montré que la diffusion axiale devient non négligeable à partir d'un nombre de Peclet  $Pe < 1000$ .

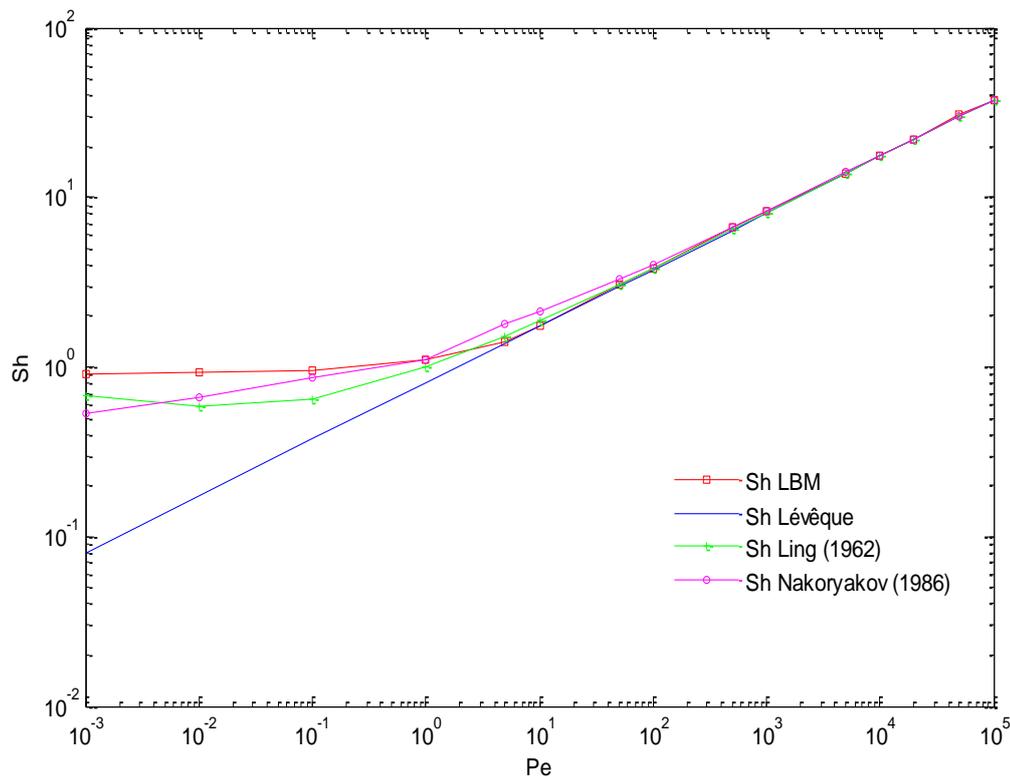
Les travaux de Ling (1962) sur le transfert de chaleur ont proposé , en utilisant un changement de variable au niveau de l'équation de convection-diffusion, un terme correctif relatif à la diffusion axiale. L'équation de l'évolution du nombre de Sherwood s'écrivait alors :

$$Sh(t) = 0,807Pe^{\frac{1}{3}} + 0,19 Pe^{-\frac{1}{6}} \quad (3.46)$$

Nakoryakov et al. (1986) ont résolu l'équation de convection diffusion en utilisant la méthode des différences finies. Ils ont établi alors une expression approchée de l'évolution du nombre de Sherwood en fonction du Peclet variant de  $10^{-2}$  à  $10^3$ . Leur étude s'est focalisée sur la zone où la diffusion axiale devient non négligeable. L'expression du Sherwood en fonction de Peclet s'écrit :

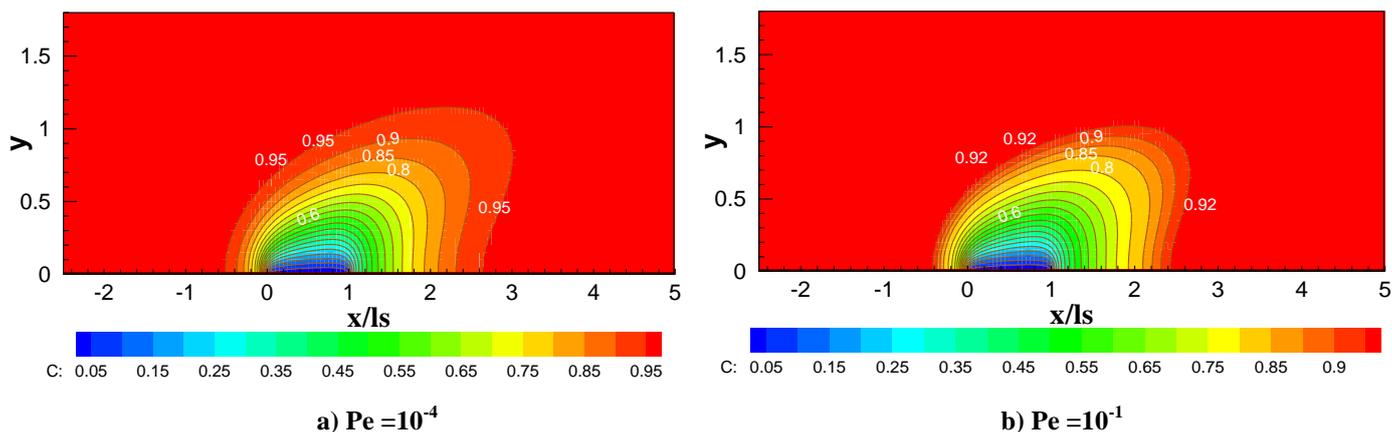
$$Sh = \begin{cases} \frac{6,28}{(4,87 + 0,77Pe - \log(Pe))} & 10^{-2} \leq Pe \leq 1 \\ 0,807Pe^{1/3} + \left(0,873/(0,886 + Pe^{1/6})\right) & 1 < Pe \leq 10^3 \end{cases} \quad (3.47)$$

Nous avons présenté également sur la figure 3.53 une comparaison entre nos résultats et ceux de Nakoryakov et de Ling . Cette comparaison montre que les solutions de Nakoryakov et de Ling sont en accord satisfaisant avec nos solutions.



**Figure 3.53** Variation du nombre de Sherwood en fonction du nombre de Peclet (littérature)

Un exemple de résultats obtenus pour deux nombres de Peclet différents est présenté sur les figures 3.54a et b qui montrent les iso-valeurs de la concentration réduite.

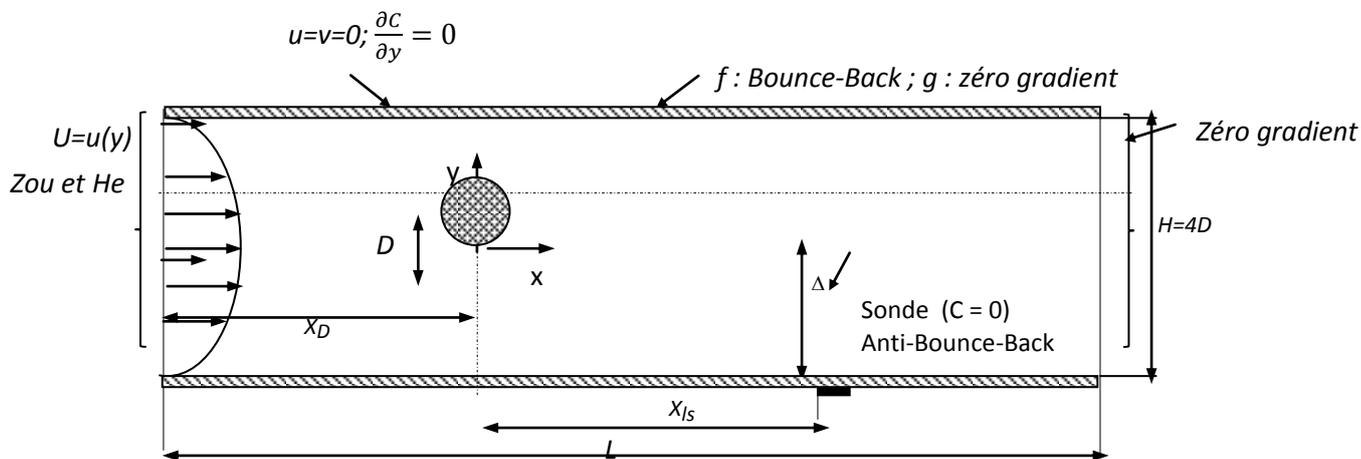


**Figure 3.54** Iso-surface de concentration autour de la sonde pour deux Peclet différents : a)  $Pe=10^{-4}$  ; b)  $Pe =10^{-1}$

La concentration au voisinage de la sonde est très proche de zéro, puis augmente progressivement au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la sonde jusqu'à atteindre la valeur de  $C=C_0$ . En augmentant le nombre de Peclet, les contours de concentration s'aplatissent légèrement.

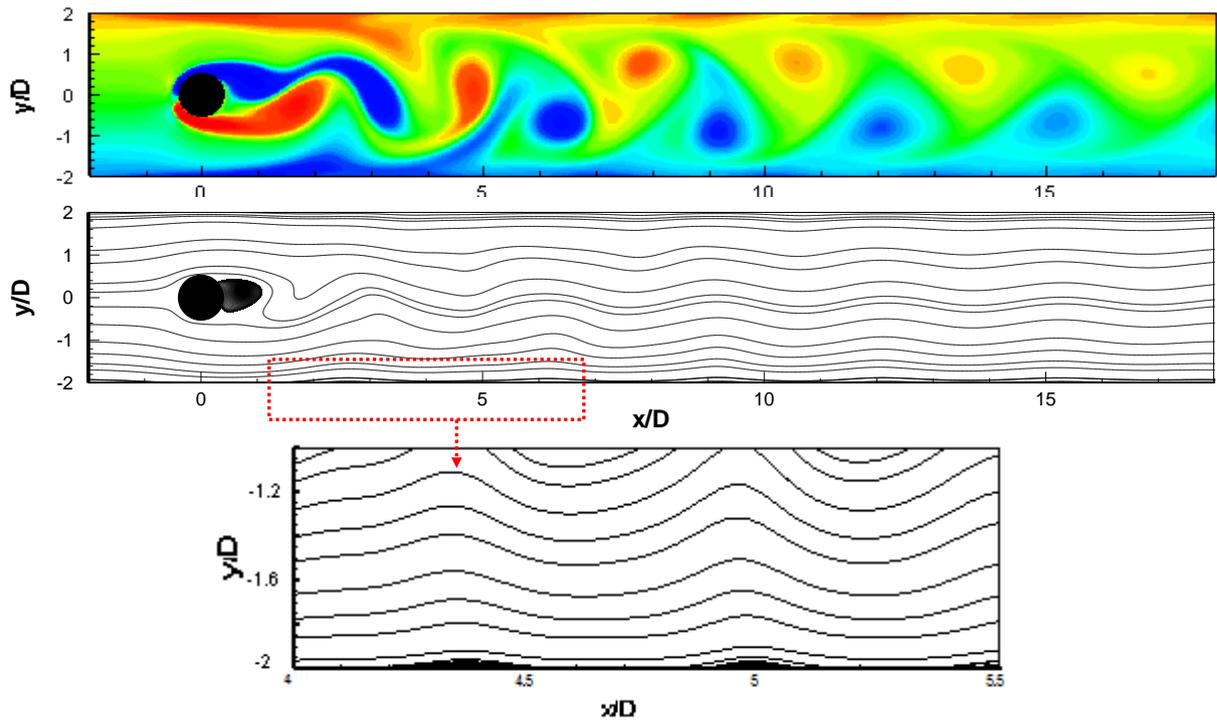
### 3.3.4.2 Simulation du transfert de masse pariétal dans le sillage d'un obstacle

Nous reprenons la configuration étudiée précédemment. Une sonde, à la surface de laquelle la concentration est nulle, est implantée à la paroi inférieure du canal en aval de l'obstacle. La figure 3.55 présente la configuration géométrique étudiée.

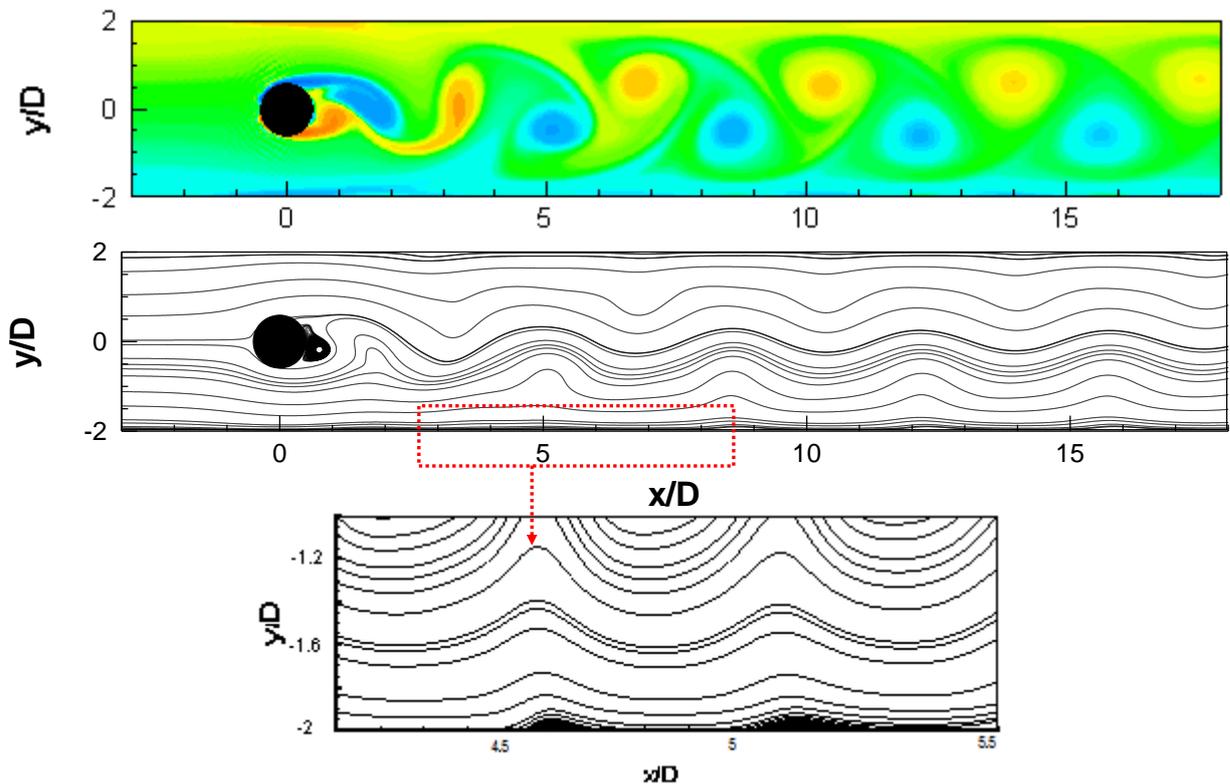


**Figure 3.55** : Configuration du problème étudié

Les figures (3.56) et (3.57) présentent un exemple de sillage obtenus pour respectivement un nombre de Reynolds  $Re =100$  et  $Re =200$ . Un zoom sur la paroi inférieure permet de localiser des zones de recirculation.



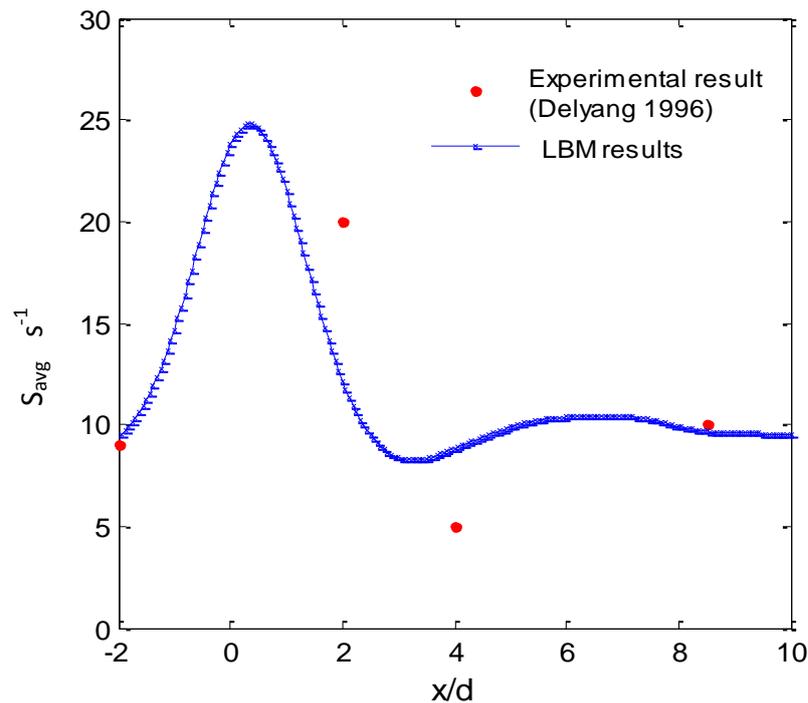
**Figure 3.56 :** Contours de vorticité instantanés et lignes de courant obtenus par LBM pour  $Re = 100$  et  $r = 1/4$



**Figure 3.57 :** Contours de vorticité instantanés et lignes de courant obtenus par LBM pour  $Re = 200$  et  $r = 1/4$

Nous avons reporté sur la figure 3.58, le profil, obtenu par LBM, du gradient de vitesse  $S_{avg}$  au niveau de la paroi inférieure, moyenné sur le temps (10000 itérations) pour un  $Re = 100$ . Nous

avons ainsi comparé ce profil au gradient pariétal de vitesse obtenu expérimentalement par Delyang (1996) en quatre emplacements différents de la paroi.

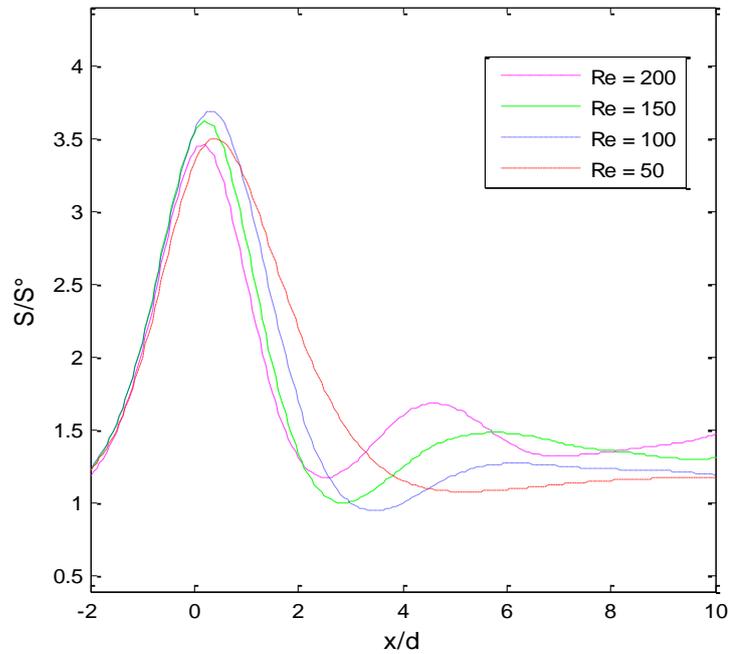


**Figure 3.58** : Variation du gradient moyen de la vitesse à  $Re = 100$  (obstacle à  $x/D = 0$ )  $Re = 100$  ( $r=1/4$  et  $\Delta=1/2$ )

Les deux résultats montrent que la valeur de  $S_{avg}$  atteint un maximum au voisinage immédiat de l'obstacle, puis diminue rapidement à une valeur minimale localisé aux alentours de  $x/D = 4$  avant d'augmenter légèrement de nouveau à une valeur quasi-constante. Les allures de l'évolution des courbes obtenues sont similaires cependant, un léger écart est noté entre les valeurs numériques LBM et les données expérimentales données par Delyang(1997) spécifiquement dans la zone proche de l'obstacle.

Nous illustrons par la figure (3.59) l'effet du nombre de Reynolds sur le gradient pariétal de la vitesse au niveau de la paroi inférieure du canal. Pour ceci nous présentons les profils des rapports  $S/S_0$ .  $S_0$  présente la valeur du gradient en absence de l'obstacle  $S_0$ .

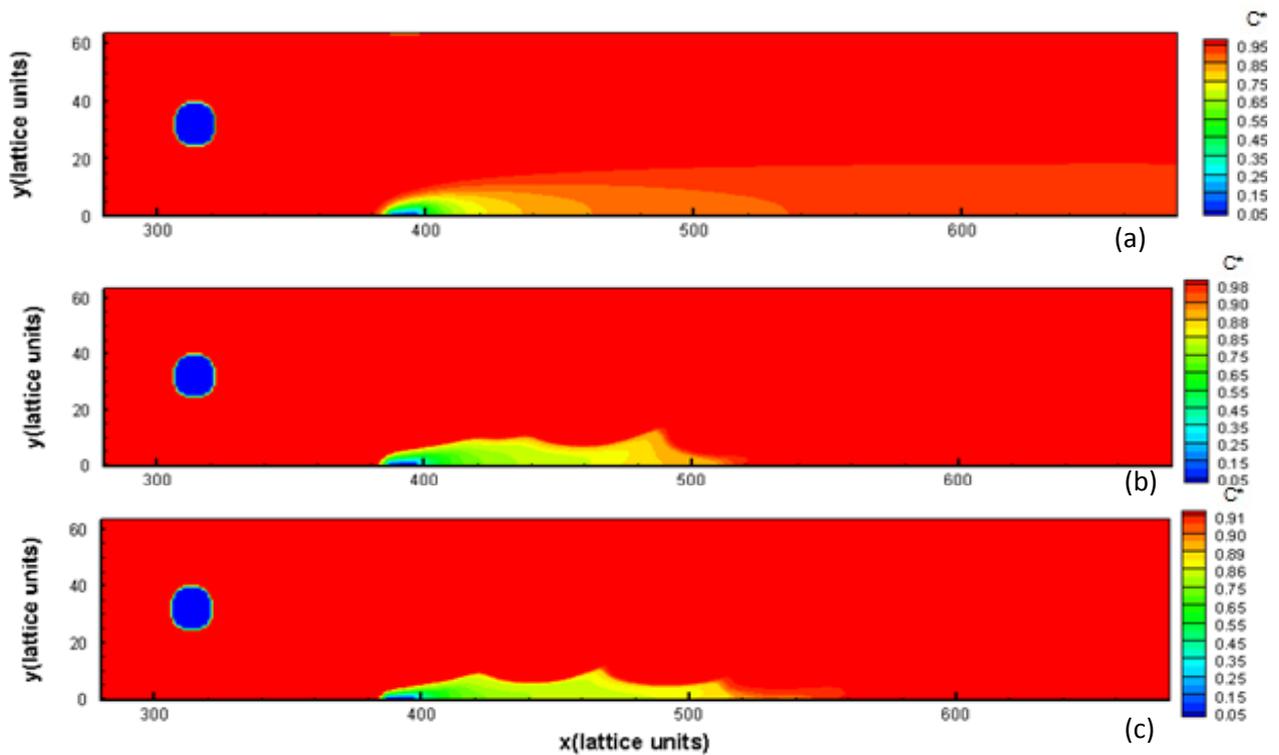
Les profils obtenus montrent un maximum au voisinage de l'obstacle ( $x/D < 5$ ), pour tous les nombre de Reynolds considérés. En s'éloignant de l'obstacle, les valeurs de  $S/S_0$  oscillent d'une façon périodique en s'atténuant. L'atténuation est d'autant plus rapide que le nombre de Reynolds est petit.



**Figure 3.59** : Profils de gradient de vitesse normalisé  $S/S_0$  pour différents nombre de Reynolds ( $r=1/4$ )

### 3.3.4.1.3 Contours de concentration

Nous entamons par la suite, des exécutions du code de calcul pour une série de nombre de Reynolds  $Re=[50 ; 100 ; 200]$ . La sonde est placée dans un premier cas à une distance  $x/D = 4.1$ . L'évolution des contours de concentration en fonction des nombres de Reynolds est illustrée par la série des figures 3.60a à c.



**Figure 3.60** : Iso-Contours de concentration sur une sonde placée à une distance:  $x=4.1D$  de l'obstacle : a)  $Re = 50$ ; b)  $Re = 100$  ; c)  $Re = 200$

L'examen des contours de concentration montre que pour un nombre de Reynolds relativement faible ( $Re=50$ ), le contour garde une forme régulière et stable. Ceci s'explique par l'absence d'instabilités dans le sillage puisque  $Re$  est inférieur au nombre de Reynolds critique ( $Re_c \sim 67$ ), correspondant au régime de recirculation caractérisé par un sillage stable.

Pour un nombre de Reynolds plus élevé,  $Re=100 > Rec$ , de légères perturbations apparaissent au niveau des contours de concentration, soulignant l'effet des instabilités présentes dans le sillage de l'obstacle sur le transfert de masse à la surface de la sonde.

Pour un nombre de Reynolds correspondant au régime d'écoulement périodique ( $Re = 200$ ), le sillage est plus instable et les instabilités sont plus fréquentes dans le sillage. Les détachements tourbillonnaires présents dans le sillage, influent considérablement le comportement des contours de concentration (figure (3.64)) qui deviennent plus perturbés. Par conséquent, le transfert de masse au niveau de la paroi sera fortement influencé par ces instabilités.

Nous étudions dans la section qui suit l'effet des variations de la position de l'obstacle et de l'emplacement de la sonde sur le taux de transfert de massique pariétal.

#### 3.3.4.1.4 Influence de la variation des paramètres géométriques

Nous nous focalisons dans cette partie, sur l'étude de l'influence de la position de l'obstacle par rapport à la paroi du canal sur le transfert de masse au niveau pariétal. A cet effet, nous considérons pour notre cas d'étude deux gap et ( $\Delta h = 0,25$ ) et ( $\Delta h = 0,5$ ). Pour chacune de ces configurations nous plaçons la sonde à trois positions différentes par rapport au centre de l'obstacle : ( $x/D = 1,9$  ;  $x/d = 4,1$  ;  $x/d=8,4$ ) identiquement aux travaux de Delyang (1997). La simulation numérique du transfert et de la dynamique portera ainsi sur la série de nombre de Reynolds  $Re = 50 ; 100 ; 150$  et  $200$ .

L'étude du comportement du nombre de Sherwood, nous permettra d'analyser l'effet de l'écoulement sur le transfert de masse. On notera alors par  $Sh_{no}$  le nombre de Sherwood en absence de l'obstacle. Le rapport  $Sh/Sh_{no}$ , met en évidence l'effet de la présence l'obstacle sur le taux de transfert de masse pariétal dans le sillage du cylindre.

Dans ce cas on définit le nombre de Sherwood moyenné par le temps selon l'expression suivante :

$$Sh(t) = \int_0^{\tau^*} \int_0^1 \frac{\partial C^*(x, y, t)}{\partial y^*} \Big|_{y^*} dx^* dt \quad (3.36)$$

avec  $\tau^*$  étant la période des oscillations des vitesses de l'écoulement.

Nous présentons ainsi dans les figures (3.61-I et II) l'évolution du Sherwood normalisé en fonction du nombre de Reynolds pour différents emplacements de la sonde par rapport à l'obstacle et pour les deux gap ( $gap = 0,5$  et  $gap = 0,25$ ). Les résultats numériques obtenus sont présentés

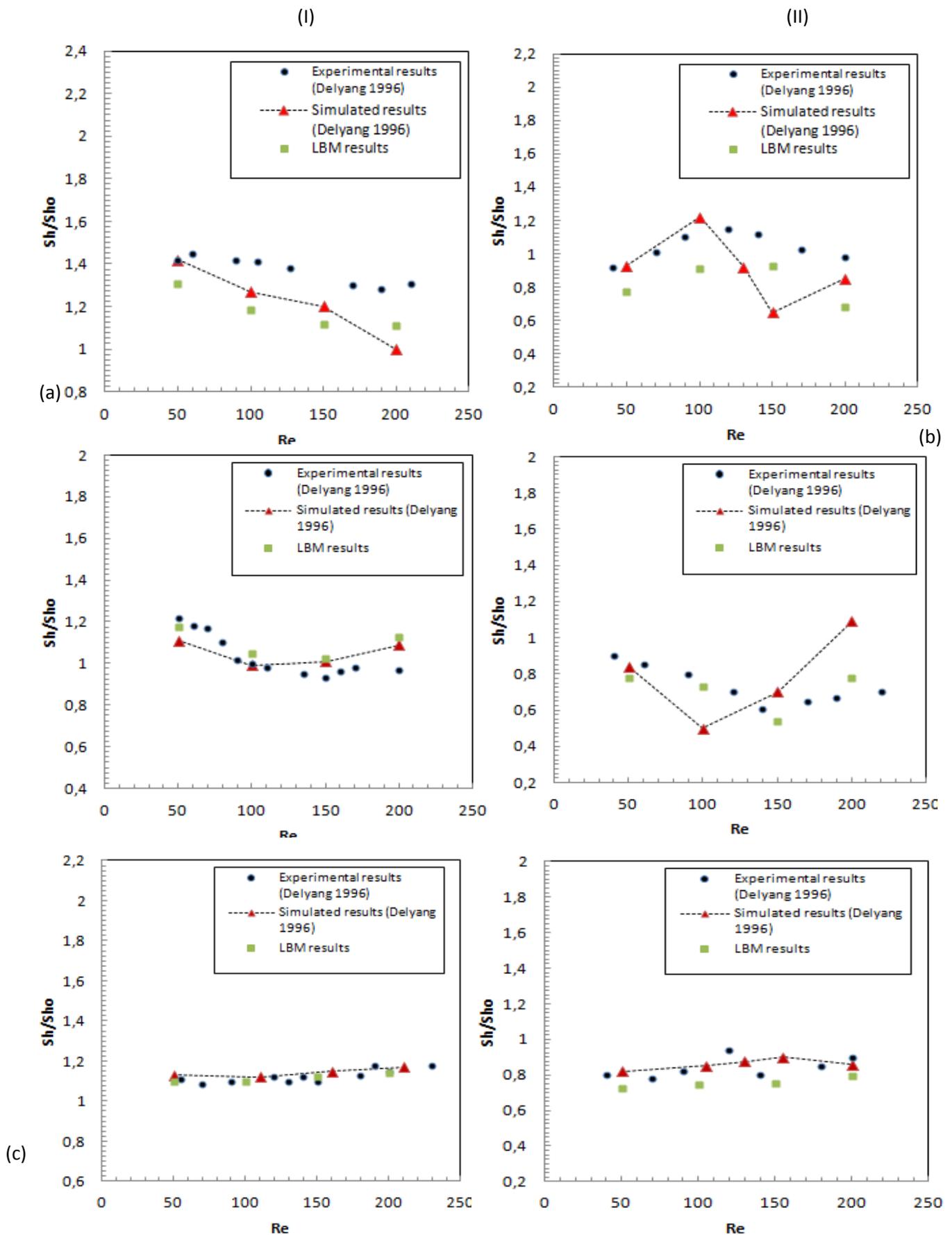
ainsi que l'évolution du Sherwood en fonction de la position de la sonde pour un nombre de Reynolds  $Re = 100$  pour les deux gap étudiés.

Dans le cas d'un obstacle placé au milieu du canal (gap = 0.5), le taux de transfert massique décroît en augmentant le nombre de Reynolds. Par ailleurs, le rapport  $Sh/Sh_{no}$  reste supérieur à l'unité pour toute la série de Reynolds considérés. Pour une configuration où l'obstacle est plus proche de la paroi (gap égal à 0,25) le taux de transfert massique est inférieur à l'unité pour la majorité des Reynolds étudiés (Figure II-a) à l'exception du son maximum localisé pour un nombre de Reynolds égal à 120. Ces résultats numériques montrent dans ce cas une diminution du taux de transfert massique de 30 à 40% en passant d'un gap égal 0,5 à un gap qui est 0,25.

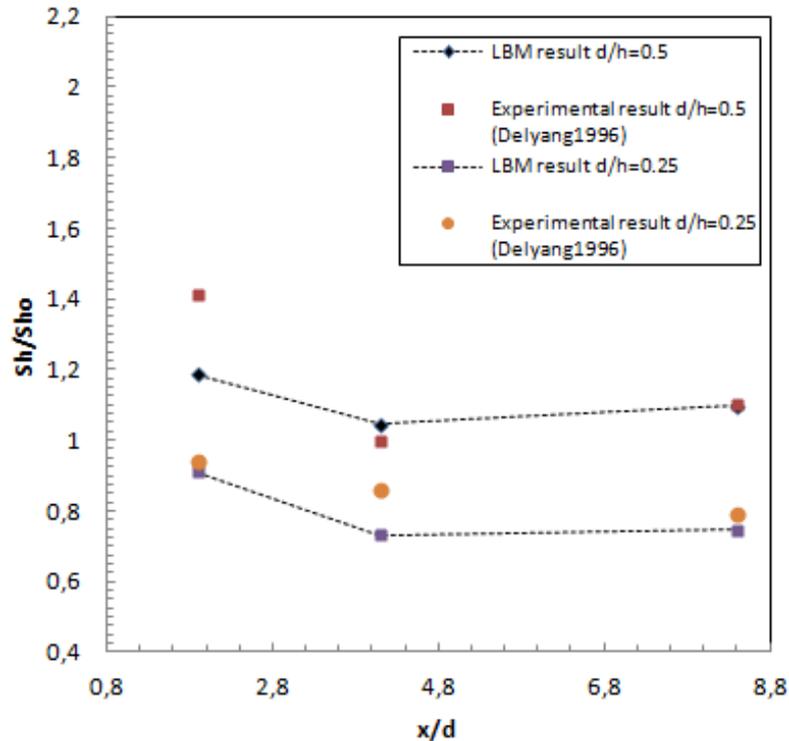
Dans le cas où la sonde est plus éloignée de l'obstacle ( $x/D=4,1$ ) le transfert est légèrement inférieur au cas où la sonde est proche de l'obstacle. Pour un gap égal à 0,5 (figure I-b), l'évolution du taux de transfert massique en fonction de  $Re$  montre une régression jusqu'à une valeur  $Re=150$  puis une augmentation. Cependant  $Sh$  reste supérieur à  $Sh_{no}$  pour tous les nombres de Reynolds considérés.

Le taux de transfert garde par la suite la même allure d'évolution que celui dans le cas d'un gap égal à 0,5, mais avec une valeur inférieure.

Dans le cas d'une sonde placée assez loin de l'obstacle ( $x/D = 8.1$ ), les instabilités du sillage sont atténuées. La variation du nombre de Reynolds n'a pas un grand effet sur les valeurs du taux de transfert de masse calculées. L'allure de  $Sh/Sh_{no}$  en fonction du nombre de Reynolds est quasi-constante proche de l'unité pour les deux configurations étudiées. En comparant les résultats numériques et les résultats expérimentaux de Delyang (1997), nous notons une assez bonne concordance.



**Figure 3.61 :** Effet de  $Re$  sur le transfert de masse pour sur une sonde placée à : a)  $x/d=1.9$  ; b)  $x/d=4.1$  ; c)  $x/d=8.4$  pour deux positions de l'obstacle : (I)  $D/h=0.5$  et (II)  $D/h=0.25$



**Figure 3.62** : Effet de la position de la sonde polarographique par rapport à l'obstacle sur le transfert de masse :  $R = 100$

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous présentons le code de simulation numérique que nous avons développé et écrit en langage Fortran 90. D'une part, ce code CFD qui est basé sur la méthode de résolution mésoscopique de Lattice Boltzmann, peut être utilisé pour la simulation des écoulements autour d'un obstacle dans le cas d'une configuration bidimensionnelle ou tridimensionnelle. D'autre part, il peut être utilisé pour la simulation du transfert massique. Une interface utilisateur a été mise en place afin de faciliter l'exploitation et l'exécution de ce code. Cette interface consiste à sélectionner le type de problème à étudier, puis faire entrer les différentes données et paramètres nécessaires au calcul.

Ce code a été utilisé pour l'écoulement autour d'un obstacle et ainsi déterminer les différents régimes d'écoulement. Une comparaison entre les écoulements obtenus dans le cas d'un obstacle circulaire et d'un obstacle carré a été réalisée.

Cette simulation par la LBM nous a permis d'étudier l'écoulement autour d'un barreau placé dans un canal rectangulaire en tenant compte des effets tridimensionnels. Nous avons aussi utilisé ce code pour la simulation du transfert de masse pariétal dans le sillage d'un obstacle. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de la littérature. Ceci nous a ainsi permis d'obtenir un code de calcul permettant de simuler le transfert massique pariétal dans la zone d'un sillage d'un obstacle sans passer par la résolution directe de l'équation de convection-diffusion.

Le chapitre suivant sera consacré à la présentation du dispositif expérimental utilisé dans l'étude expérimentale des écoulements et transferts. Les résultats des mesures expérimentaux obtenus seront analysés et comparés aux résultats numériques dans l'objectif de la validation de notre code de calcul CFD.



## **-Chapitre IV-**

Dispositifs expérimentaux et techniques de  
mesures



## **4.1 Introduction**

Ce chapitre sera consacré à la présentation des deux dispositifs expérimentaux utilisés ainsi que les techniques de mesures adoptées. En premier lieu, nous présenterons le premier dispositif expérimental qui a servi à l'étude de l'écoulement autour d'un obstacle carré et ainsi à la validation expérimentale des résultats de simulation par la méthode de Lattice Boltzmann.

Dans un second lieu, nous présenterons le deuxième dispositif expérimental permettant l'étude d'un écoulement de Couette-Taylor. Ce dispositif est constitué d'un cylindre interne mobile et d'un cylindre externe fixe, permettant de générer différentes instabilités.

Nous présenterons enfin les différents moyens employés ainsi que les différentes techniques expérimentales utilisées à savoir la vélocimétrie à images de particules, la polarographie et la visualisation.

## **4.2 Dispositif expérimental de l'écoulement autour d'un obstacle : Banc hydraulique**

Le dispositif expérimental (figure (4.1)) permettant l'étude de l'écoulement autour d'un obstacle en milieu confiné a été conçu et réalisé à la fois sur deux sites : au laboratoire LESTE à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de l'Université de Monastir (Tunisie) et au laboratoire GEPEA de l'Université de Nantes. Ce dispositif en double exemplaire (LESTE et GEPEA), est constitué d'un bac d'alimentation, d'une veine d'essai, d'une pompe, de débitmètres et d'un réservoir de stockage.

Ce dispositif obéit à un certain nombre de critères, pour répondre aux exigences requises lors des expérimentations :

- Pour la gamme des nombres de Reynolds exploités, l'écoulement doit être parfaitement laminaire et pleinement développé avant d'atteindre l'obstacle.
- Les parois du canal doivent être transparentes afin d'assurer une bonne visibilité de l'écoulement et ainsi de réaliser de bonnes mesures des champs de vitesse par PIV.
- Les veines d'essais doivent être facilement démontables afin de permettre les diverses interventions telles que l'ajustement de la position de l'obstacle ou son interchangeabilité.
- La géométrie du canal doit être convenable et de dimensions raisonnables afin de pouvoir bien positionner le laser ainsi que la caméra pour la PIV et d'assurer la bonne résolution spatiale lors des mesures.

Dans ce qui suit, nous décrivons ces dispositifs.

### **Bac d'alimentation**

Il s'agit d'un réservoir de volume  $0,15m^3$ , monté en amont de la veine d'essai et dont le rôle est d'une part, d'alimenter toute l'installation en eau et d'autre part d'assurer un débit constant d'un écoulement laminaire et permanent avant d'atteindre l'emplacement de l'obstacle (figure 4.1a). A l'intérieur de ce bac, se trouve trois grilles en PVC montées en parallèles afin d'assurer une homogénéisation du profil de vitesse dans la veine d'essai. Un trop-plein a été installé dans le bac de charge (ou d'alimentation) afin d'assurer un niveau constant d'eau et donc une pression et un débit constant à l'entrée de la veine d'essai.

### **Veine d'essai**

La veine d'essai (figure 4.1b) est un canal rectangulaire de longueur  $L=3m$ , de largeur  $l=0,3m$  et de hauteur  $h=0,03m$ . Elle est composée de quatre plaques entièrement en plexiglas transparent afin d'assurer une bonne visualisation de l'écoulement lors des acquisitions en utilisant la technique de PIV. Les plaques sont assemblées par des vis de fixation, et des joints spécifiques sont intégrés au niveau des différentes jonctions afin d'assurer l'étanchéité de l'écoulement. Un support métallique maintient la veine d'essai horizontale et permet en même temps de limiter les vibrations due à la pompe lors de la mise en marche du circuit hydraulique. Cette veine d'essai est aussi facilement démontable, afin de permettre l'accès à l'obstacle en vue de son remplacement ou le changement de sa position initiale. L'obstacle utilisé qui est en plexiglas transparent est soit un barreau de section carrée de côté  $0,01m$ , soit un cylindre de diamètre  $0,01m$ . Cet obstacle est placé horizontalement à une distance de  $1,6m$  par rapport à l'entrée de la veine d'essai. Cette zone a été choisie afin d'avoir un écoulement laminaire et pleinement développé. Cet obstacle a été placé au milieu de la section du canal à une distance  $\Delta = 0,01m$  des parois inférieure et supérieure, assurant ainsi un confinement  $r=1/3$  et un paramètre de gap  $\gamma = 1$ .

### **Débitmètres**

A la sortie de la veine d'essai, deux débitmètres en parallèle de type « Brooks » ( $570 l/h$  et  $2250 l/h$ ) sont montés en parallèles (figure 4.1c). Des vannes de réglages multi-tours sont placées à l'aval de chaque débitmètre et permettent d'ajuster le débit avec une très bonne précision.

## Réservoir de Stockage

L'eau évacuée de la veine d'essai est acheminée grâce à une conduite vers un réservoir de stockage de capacité  $0,5 m^3$  en passant par une vanne de contrôle montée à l'amont de la conduite (figure 4.1d). Du bac de stockage, l'eau est refoulée de nouveau, grâce à une pompe d'alimentation, vers le bac d'alimentation puis la veine d'essai. Une vanne de contrôle et un by-pass permettent de réguler le débit nécessaire pour maintenir un niveau constant dans le bac d'alimentation.

## Pompe d'alimentation : (Figure 4.1-e)

Une pompe centrifuge de débit nominal  $Q = 3(m^3/heure)$  permet l'alimentation du bac d'alimentation à travers le bac de stockage et assure ainsi le circuit fermé de l'écoulement au sein de l'installation.

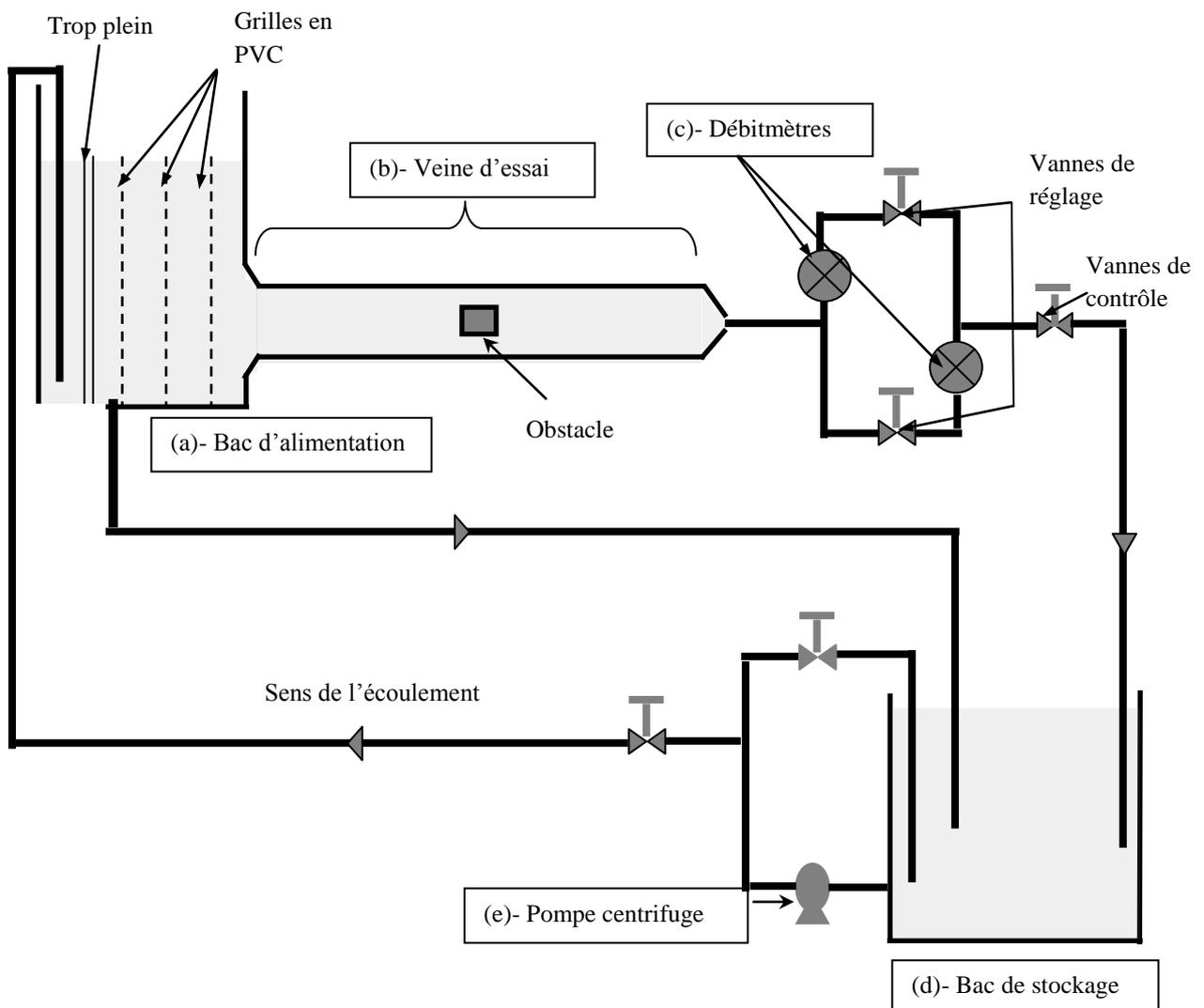


Figure 4.1 : Schéma de l'installation expérimentale du canal hydraulique

### 4.3 Dispositif expérimental de Couette-Taylor

Ce dispositif a été conçu au laboratoire GEPEA de l'université de Nantes et fabriqué par la société Protolabo dans le cadre de la thèse de doctorat de Berrich (2011) lors d'un projet ANR intitulé : «*Cisaillement pariétal et tourbillons en écoulement Taylor-Couette*» (**CPARTOUT**). La finalité de ce projet est l'étude de la dynamique d'un écoulement de Couette-Taylor avec et sans écoulement axial. Et plus précisément, il s'agit d'étudier les interactions entre tourbillons et parois en utilisant la synchronisation entre la PIV et la polarographie. En effet, avec la PIV, la dynamique des structures tourbillonnaires est déterminée et avec la méthode électrochimique (ou polarographique), les empreintes tourbillonnaires sur la paroi sont mesurées.

Le dispositif expérimental en question est constitué de deux cylindres coaxiaux maintenus en position verticale, de hauteur  $L=0,45\text{ m}$ . Un espace annulaire de largeur  $e=14,5\text{ mm}$  est maintenu entre le cylindre extérieur de rayon  $R_e=0,1\text{ m}$  et le cylindre intérieur de rayon  $R_i=0,085\text{ m}$ . Le rapport d'aspect est  $\Gamma=L/d=33,03$ . Le cylindre intérieur est couvert par deux couvercles supérieur et inférieur, fixés au cylindre externe qui est maintenu immobile.

Le système de Couette-Taylor (SCT) a été conçu en respectant plusieurs conditions :

- L'installation doit être constituée d'un matériau inerte et évitant tout contact métallique avec la solution électrochimique (fortement corrosive) durant tout son parcours à travers les différents éléments (parois, pompes, débitmètres, tuyauteries, etc.).
- Les parois doivent être transparentes et propres (absences d'encoches ou rayures) afin d'assurer une bonne qualité de visualisation lors des mesures par la technique de PIV en encore lors des visualisations directes. Trois surfaces du cylindre externes sont planes, afin d'éclairer l'écoulement par une nappe laser d'une part, et d'autre part pour la prise d'images du plan éclairé par une caméra CCD du système de PIV.
- Le système doit être maintenu immobile par un support rigide, afin d'éviter les vibrations dues à la rotation du cylindre interne ou le refoulement du liquide par la pompe.
- La disposition du système doit permettre un bon emplacement de la caméra CCD et de la nappe laser.

Le plan de conception du dispositif (réalisé sous Autocad) est représenté par la figure (figure.4.2). Une vue globale de l'installation est illustrée par la figure (figure.4.3).

### **Cylindre intérieur**

Fabriqué entièrement à partir du plexiglas transparent, le cylindre intérieur possède un rayon  $R_i=0,085m$  et une hauteur  $L=0,45m$  (figure 4.2). Ce cylindre est couplé à l'arbre d'un moteur assurant sa rotation. Un couvercle plan supérieur en plexiglas transparent, et d'épaisseur  $30,5\text{ mm}$ , maintient immobile le moteur servant à tourner le cylindre intérieur.

L'ensemble cylindre interne / couvercle / moteur électrique, est assemblé par des vis aux couvercles inférieur et supérieur liés au cylindre externe fixe. L'ensemble du système est facilement démontable afin de permettre le changement du cylindre interne ou le nettoyage des parois.

### **Cylindre extérieur :**

Le rayon du cylindre externe est  $R_e=0,1m$ , permettant ainsi un rapport radial  $\eta=0,85$  (Figure 4.2). Le cylindre en question est fabriqué à partir d'un bloc parallélépipédique de plexiglas transparent, et est formé de trois faces planes de même dimension ( $0,45m \times 0,25m$ ) et une quatrième arrondie (demi-cylindre) épousant ainsi la forme du cylindre externe. Deux sorties, reliées à deux tuyaux de retour, sont situées à l'extrémité supérieure de ce cylindre fixe et permettant donc d'évacuer le fluide (liquide traversant l'espace annulaire) de la veine d'essai vers le bac de stockage. Ce circuit assure le débit axial pour superposer à l'écoulement de Couette-Taylor celui de Poiseuille.

Le coté arrondi est équipé de 38 sondes électrochimiques circulaires simples, affleurant la surface interne de ce cylindre extérieur fixe. Une sonde tri-segmentée est aussi localisée au milieu de l'une des surfaces extérieures planes du cylindre immobile. Ce dernier, repose sur un couvercle inférieur formant un compartiment vide et servant à l'alimentation de l'espace annulaire du dispositif de Couette-Taylor. L'ensemble de ce dispositif est fixé à un support réalisé en profilés d'aluminium permettant d'assurer la stabilité de l'installation.

### **Sondes électrochimiques**

Trente-huit sondes électrochimiques simples circulaires sont implantées selon deux configurations (figure 4.4) :

- Une rangée verticale sur la paroi intérieure le long d'une génératrice du cylindre extérieur, est composée de 14 sondes disposées en 7 paires distantes de  $55mm$  les unes par rapport aux autres. Chaque paire est composée de deux sondes espacée de  $10\text{ mm}$ .

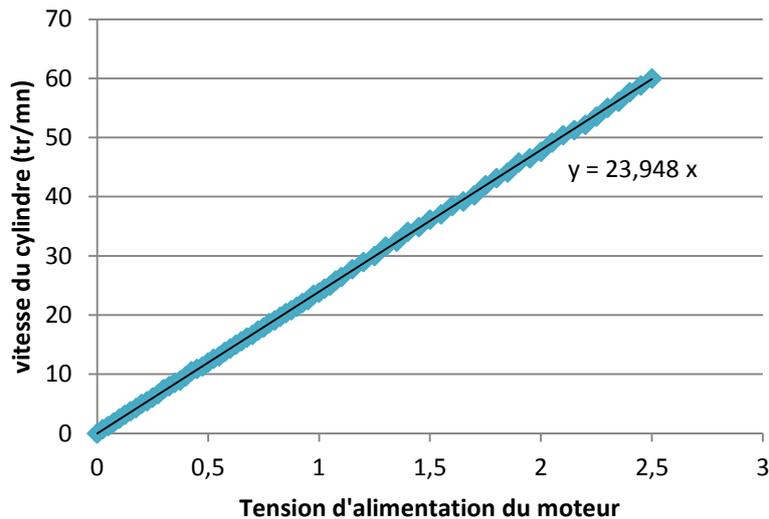
- Deux rangées horizontales, composées de 13 sondes simples chacune, sont disposées de façon parallèle au milieu de la hauteur du cylindre fixe. Ces deux rangées sont séparées d'une distance de  $10\text{ mm}$ . Chaque sonde d'une même rangée fait un angle de  $7^\circ$  sur la circonférence de la surface intérieure du cylindre externe par rapport à la sonde voisine. Une paire de sonde est commune à la fois à la rangée verticale et aux deux rangées horizontales.

Les 38 sondes électrochimiques, sont alors implantées sur la paroi intérieure du cylindre fixe, de façon à affleurer convenablement le fluide (solution polarographique) dans l'espace annulaire du système de Couette-Taylor. Le polissage de ces sondes a été effectué de sorte qu'une quasi-continuité de l'écoulement pariétal entre la paroi inerte et les surfaces des microélectrodes soit assurée pour déterminer correctement le gradient pariétal de vitesse.

La sonde triple (ou tri-segmentée) est de diamètre  $0,5\text{ mm}$ . Cette dernière a été conçue et fabriquée par le professeur Sobolik selon une procédure bien détaillée (Sobolik et al., 1987). Un anneau gradué, fixé sur la paroi externe du cylindre immobile, a été assemblé à la sonde. Il permet de repérer l'angle de rotation que fait la sonde par rapport à une origine relative (isolant entre deux segments).

#### **Moteur électrique d'entraînement :**

Un moteur électrique de type  $\alpha$ -Step, commercialisé par la société Omeron, assure la rotation ou la mise en mouvement du cylindre intérieur du dispositif de Couette-Taylor. Muni d'un réducteur de vitesse mécanique, il permet d'imposer une vitesse de rotation maximale d'environ  $120\text{ tr/mn}$ . Ce moteur est alimenté par un générateur de signaux, capable d'imposer plusieurs types de mouvements au cylindre intérieur (continus, sinusoïdaux, carrés, rampes, aléatoires, etc.). Ce générateur de tension permet alors d'imposer une tension au moteur et d'assurer ainsi sa mise en mouvement. L'étalonnage de la vitesse de rotation du cylindre mobile couplé directement au réducteur de vitesse du moteur par un accouplement élastique isolé électriquement, permet d'obtenir la courbe d'étalonnage linéaire représentée sur la figure (4.2). Grâce à cette courbe, on peut remonter à la vitesse de rotation du cylindre pour chaque tension imposée.



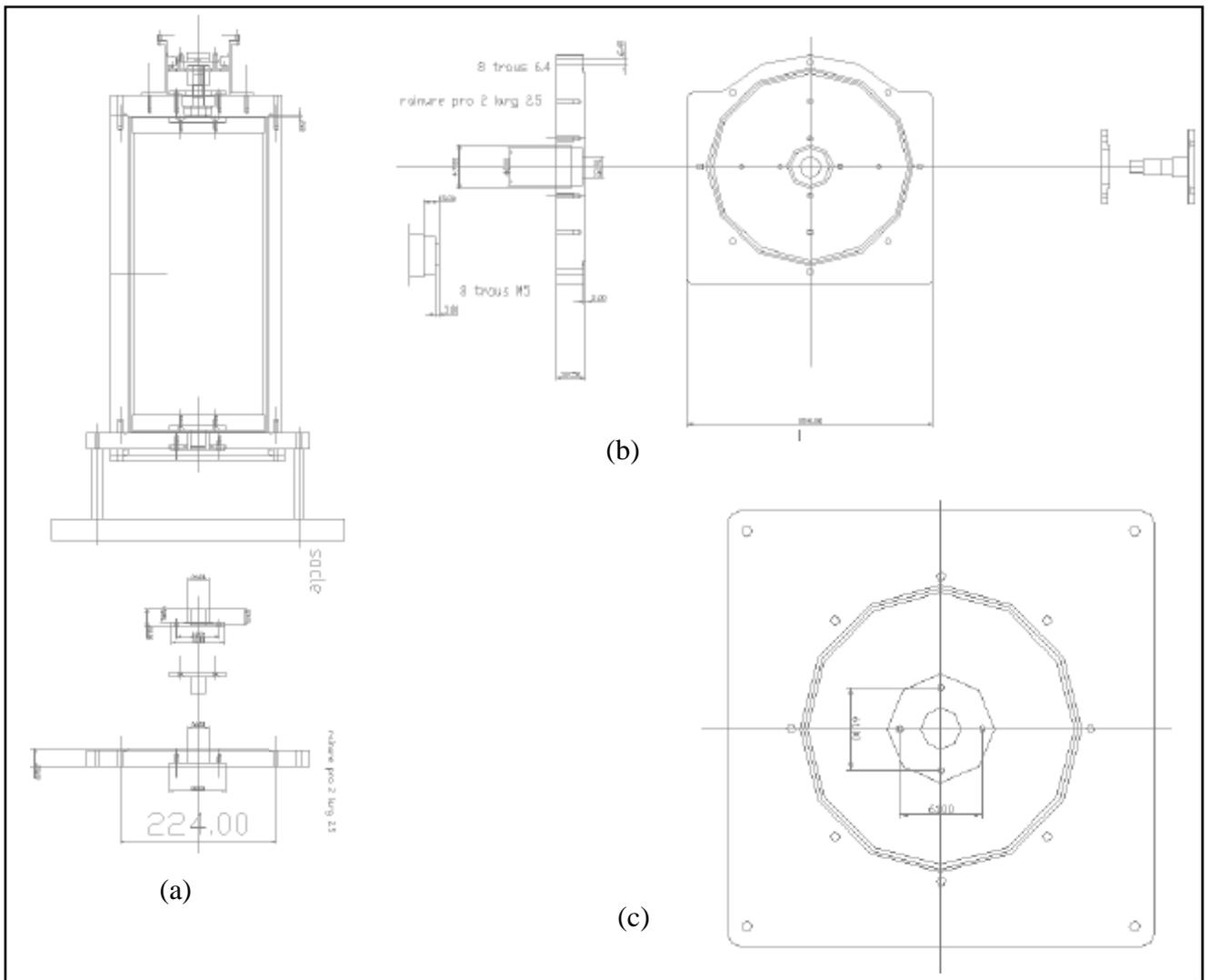
**Figure 4.2** Profil de vitesse de rotation par rapport à la tension d'alimentation du moteur

### **Pompe assurant le débit axial :**

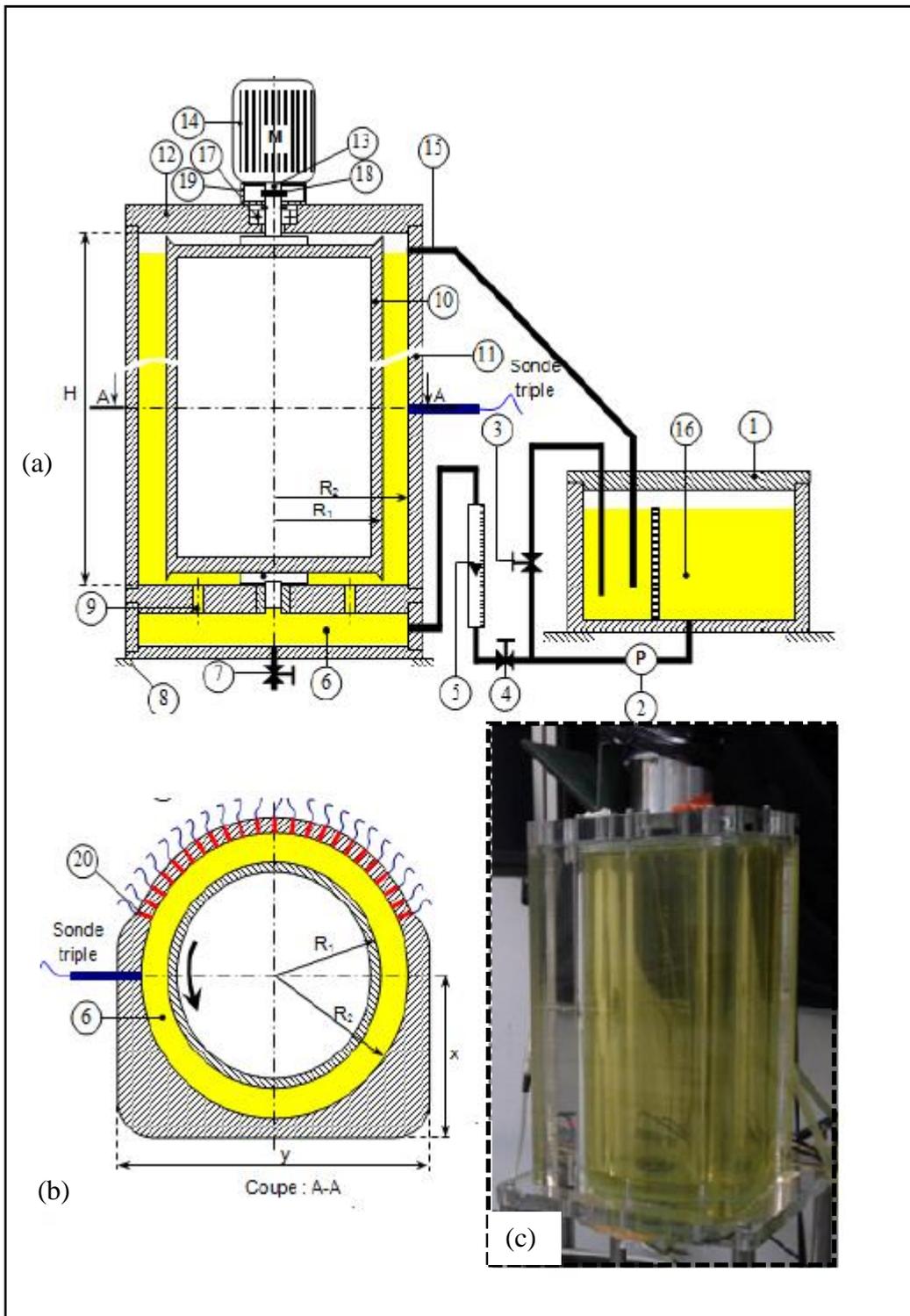
Une pompe centrifuge de débit nominal  $10 \text{ l/min}$  permet d'alimenter la veine d'essai (espace annulaire) à partir du bac de stockage. Cette pompe est raccordée au dispositif expérimental grâce à des tuyaux flexibles permettant la facilité du montage et de démontage. Un support séparé du dispositif de maintien de la pompe avec le bac de stockage est mis en place afin d'éliminer les vibrations qui pourraient être transmises à l'écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille. Cette pompe est entièrement fabriquée en matière plastique afin d'éliminer les phénomènes de corrosion due à la solution électrochimique.

### **Bac de stockage**

Un bac de stockage cylindrique de volume  $5 \text{ l}$  environ sert d'une part, à alimenter le dispositif de Couette-Taylor à travers la pompe, et d'autre part à recueillir le fluide à la sortie de la veine d'essai lors d'un écoulement axial superposé à celui de Couette-Taylor, afin d'assurer sa recirculation.

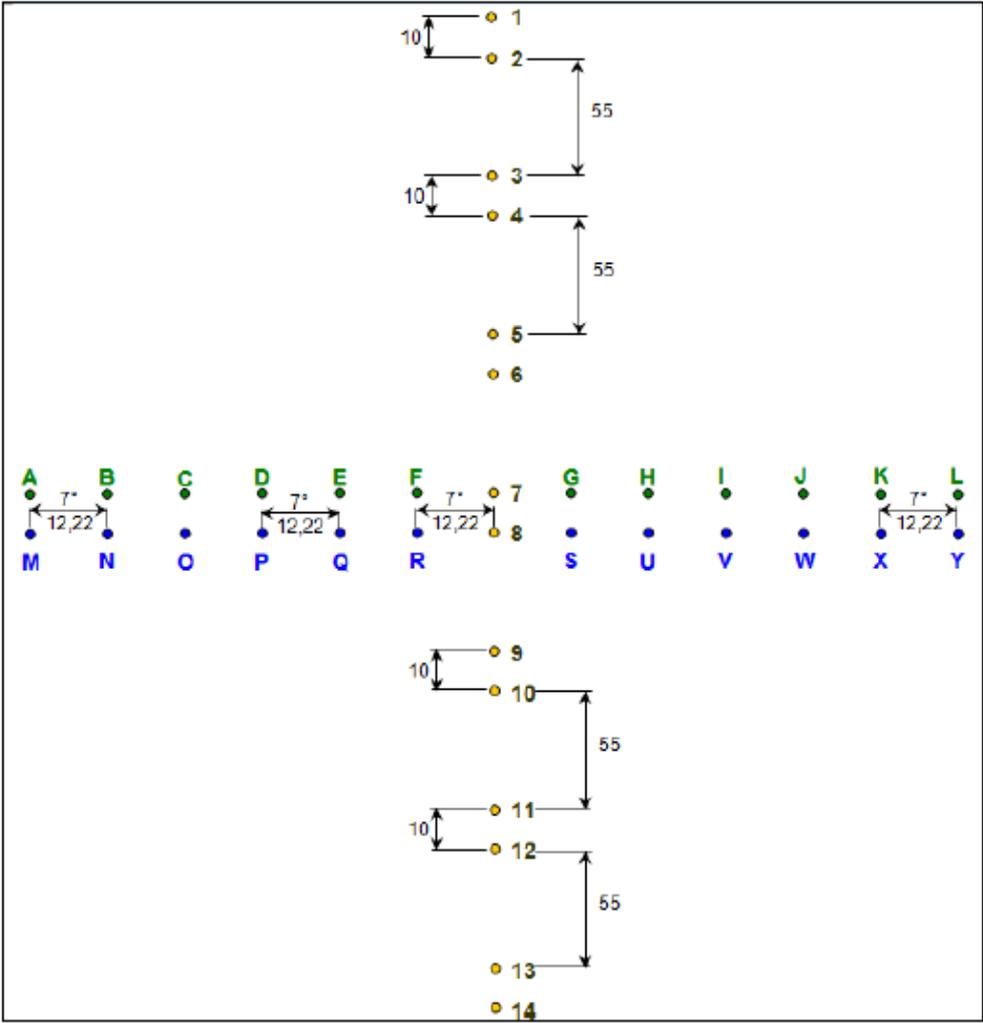


**Figure 4.3** : Plan de conception du dispositif de Couette Taylor (Berrich, 2011) : a) Vue de face du dispositif ; b) Vue de dessus ; c) Vue de dessous

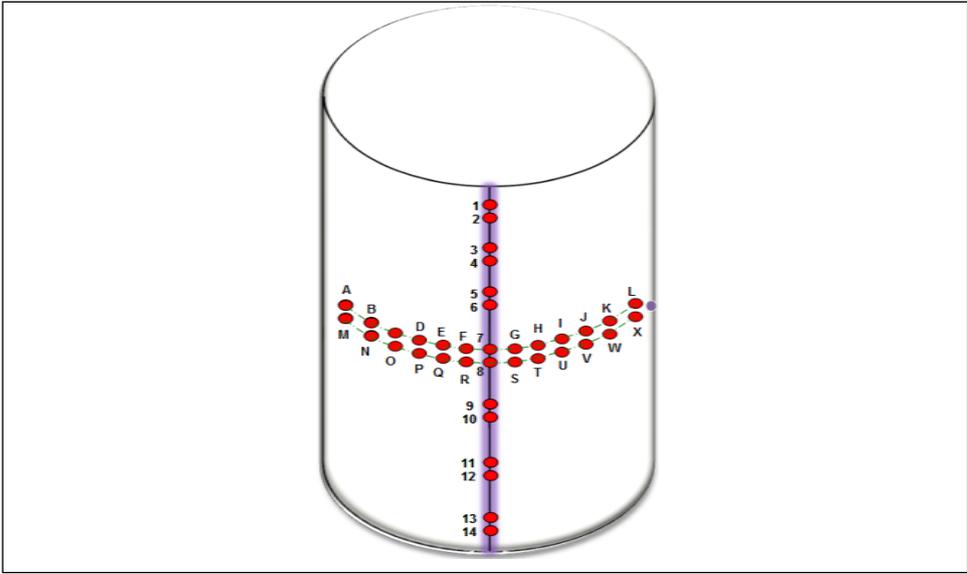


**Figure.4.4** : Vue d'ensemble de l'installation expérimentale de Couette-Taylor : a) Coupe face du dispositif ; b) Coupe plan (A-A) ; c) Photographie du dispositif

1. Réservoir de stockage ; 2. Pompe ; 3. By-pass ; 4. Vanne de contrôle de débit ; 5. Débitmètre ; 6. Compartiment d'alimentation de la vanne d'essai ; 7. Vanne de vidange ; 8. Socle support ; 9. Orifices de remplissage de la veine d'essai (2 orifices) ; 10. Cylindre interne ; 11. Cylindre externe ; 12. Couvercle supérieur ; 13. Arbre moteur ; 14. Moteur électrique ; 15. Orifice de retour de l'écoulement ; 16. Solution polarographique ; 17. Joint élastique ; 18. Disque de protection ; 19. Flasque ; 20. Sondes électrochimiques simples circulaires

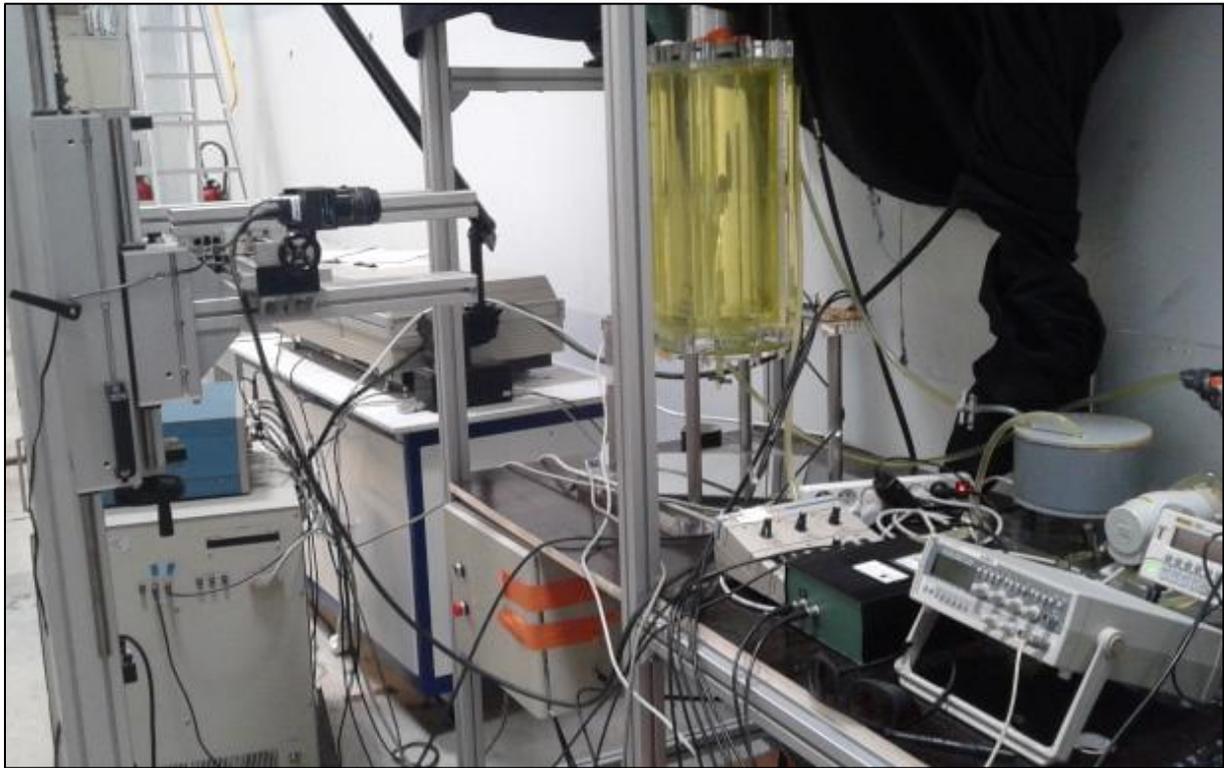


(a)



(b)

**Figure.4.5 :** Disposition des sondes électrochimiques sur la paroi du cylindre externe



**Figure.4.6** : Photos de l'installation expérimentale (vue globale)

#### **4.4 Techniques expérimentales utilisées**

Dans cette partie, nous présentons les trois principales techniques expérimentales utilisées lors de notre étude. La première est une méthode qualitative permettant la visualisation de l'écoulement contenant les structures tourbillonnaires grâce à un ensemencement de ce dernier et un éclairage par plan laser de la veine d'essai transparente. La deuxième technique est la Vélocimétrie par Image de Particules (PIV) qui est une technique à la fois qualitative et quantitative qui permet la détermination des champs instantanés de vitesse de l'écoulement. La troisième méthode est la polarographie et qui a été employée dans le but de caractériser l'empreinte des structures tourbillonnaires sur la paroi grâce aux microélectrodes implantées sur la surface interne du cylindre fixe. Dans une seconde étape de ce travail expérimental, les deux techniques PIV et polarographie ont été synchronisés pour l'obtention à la fois de la dynamique des structures tourbillonnaires dans l'écoulement et de leurs empreintes pariétales.

##### **4.4.1 Visualisation qualitative**

La technique de visualisation de l'écoulement nous permet d'avoir une description qualitative du comportement de l'écoulement et des différentes instabilités générées. Cette technique repose sur plusieurs éléments fondamentaux (la source lumineuse, la caméra d'acquisition, l'ensemencement, etc.).

Dans notre cas, il s'agit d'observer l'évolution de la topologie de l'écoulement, au niveau de l'espace annulaire en fonction de la vitesse de rotation du cylindre interne. A cet effet, nous avons utilisé une nappe laser sur la hauteur de l'entrefer du dispositif de Couette-Taylor ( $e = 14,5 \text{ mm}$ ) qui nous a permis d'observer la topologie des structures tourbillonnaires de l'écoulement dans le plan  $(r,z)$ . Une caméra placée en face de l'écoulement assure l'acquisition des différents clichés, permettant ainsi l'observation de l'évolution des instabilités au cours du temps dans l'espace annulaire du SCT.

L'ensemencement de l'écoulement est un élément primordial dans la technique de visualisation de l'écoulement. Afin de pouvoir observer nettement la structure de l'instabilité, il faut avoir une bonne diffusion de la lumière qui dépend de plusieurs paramètres, comme l'indice de réfraction des particules dans le milieu en question, leurs tailles ainsi que leurs orientations. Cependant, le critère de choix le plus important des particules d'ensemencement reste leur traçabilité. En effet, celle-ci exprime la capacité d'une particule à suivre le mouvement du fluide sans créer aucune intrusion ni perturbations de l'écoulement ou de ses propriétés.

Plusieurs types de particules d'ensemencement sont employés dans la pratique. La nature de l'écoulement ou du fluide en question permet de déterminer le type du traceur à utiliser.

Nous avons alors choisi d'utiliser dans notre cas des particules de kalliroscope fréquemment employées pour ce type d'écoulement dans les systèmes de Couette-Taylor (Gauthier et al., 1998 ; Eloy, 2000 ; Abcha et al., 2008 et Berrich, 2011).

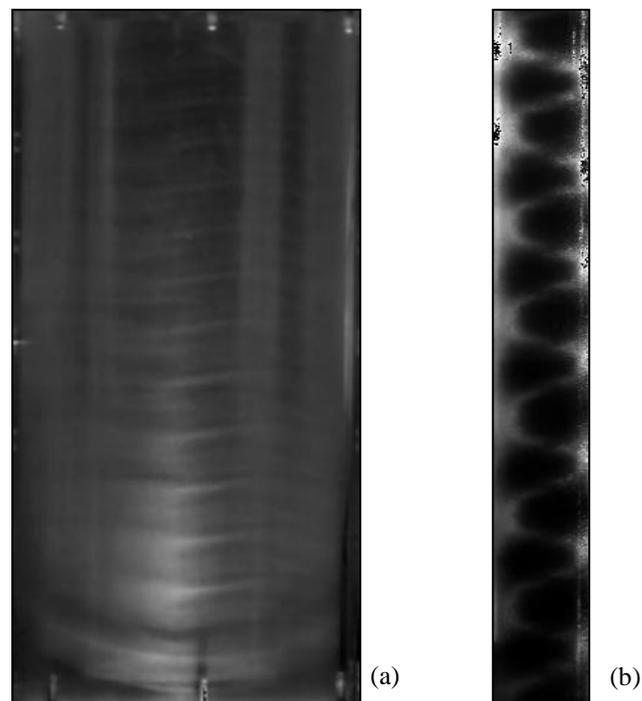
Les particules de kalliroscope sont des suspensions inventées par Paul Matisse (Matisse et al., 1984), composées de paillettes réfléchissantes de forme plate et allongée et généralement d'origine biologique. Ces particules sont anisotropes, de dimensions  $30 \times 6 \times 0,07 \mu\text{m}$  et de masse volumique  $1,62\text{g/cm}^3$  (Gauthier et al., 1998). Avec un fort indice de réfraction ( $n=1,85$ ), ces particules assurent une bonne visibilité de l'écoulement même à faible proportion.

Dispersées dans l'écoulement de Couette- Taylor à une concentration de 1%, ces particules n'introduisent aucun effet sur la nature et la viscosité de l'écoulement. En effet, la quantité de kalliroscope à introduire dans l'écoulement doit être bien déterminée expérimentalement. Ainsi, une quantité trop faible ne permet pas d'avoir un contraste suffisant au niveau des motifs tourbillonnaires alors qu'une quantité trop importante ne permet pas à la nappe de lumière laser de pénétrer suffisamment dans le fluide. Il s'agit alors de trouver un compromis entre un bon contraste et une bonne vision des instabilités.

D'autre part, ces particules ont la propriété d'avoir une vitesse de sédimentation faible ce qui permet de garder un mélange homogène durant la durée d'acquisition.

Afin que les particules de kalliroscope révèlent la structure de l'écoulement elles doivent être orientées convenablement par rapport à la caméra d'acquisition. Plusieurs études (Gauthier et al. (1998) , Abcha et al.(2007)) ont montrés que ce type de particules s'alignent avec les lignes de courant et permettent généralement de donner des informations sur la composante radiale de la vitesse.

Les images acquises par la caméra, permettent de reconstruire des séquences vidéo de l'évolution de la topologie de l'écoulement au cours du temps. Ce qui nous permettra de dénombrer les nombres d'ondes des vortex de Taylor.



**Figure.4.7** : Photos de l'écoulement ensemençé au kalliroscope à 1% : a) Vue globale ; b) plan (r,z) éclairé par une nappe laser

#### 4.4.2 Vélométrie par Image de Particules (PIV)

La technique de PIV (Vélométrie à Image de Particules) est une technique expérimentale non-intrusive, permettant la visualisation et l'analyse de l'écoulement. Grâce à une source laser éclairant à très court intervalle une fine couche de fluide ensemençée et une caméra numérique CCD, la PIV permet la reconstitution des champs instantanés de vitesse de l'écoulement.

Cette technique qui est relativement récente (apparue seulement il y a quelques dizaines d'années), ne cesse d'évoluer et devenir de plus en plus performante. Outre les champs de vitesse instantanés obtenus, la PIV permet par post-traitement de fournir différents types de

données quantitatives très utiles pour la caractérisation des écoulements. Parmi les particularités de cette technique comparée aux méthodes dites « classiques » (fil chaud, LDA, etc.), c'est qu'elle permet la détection simultanée des grandes et petites structures (détection multi-échelle) d'un écoulement en obtenant un champ de vitesse instantané dans un plan de l'écoulement étudié.

La technique de PIV peut être appliquée dans divers domaines, tant en aérodynamique qu'en hydrodynamique et pour une plage de vitesse allant de très faibles vitesses jusqu'à celles où l'écoulement est supersonique.

Nous détaillerons dans la suite, le principe de cette méthode ainsi que ses différents éléments fondamentaux.

#### **4.4.2.1 Principe de la PIV**

La PIV permet d'obtenir de cartographies de vitesses au moyen d'une caméra et d'une nappe laser éclairant un plan de l'écoulement à des instants successives très courts. Connaissant la fréquence des pulses laser, le principe de cette méthode consiste à corrélérer deux images consécutives afin de déterminer le déplacement des particules d'ensemencement et de remonter aux champs de vitesse instantanés.

Le Laser éclaire à deux instants successifs le plan de mesure. A chaque impulsion, une caméra digitale synchronisée au système laser, et placée perpendiculairement au plan de mesure, effectue des acquisitions de doublets d'images de particules. Chaque image est divisée alors en un nombre de sous-fenêtres appelées « zones d'interrogations ». A l'aide d'une inter-corrélation, on peut déterminer le déplacement des particules. Connaissant l'intervalle de temps  $dt$  entre deux images successives, le champ de vitesse de l'écoulement en question peut être alors déterminé.

Le dispositif de mesures par PIV mis en place pour les acquisitions de champs de vitesses dans notre cas est illustré par la figure (4.8).

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées afin de calculer les champs de vitesse à partir des captures réalisées. Pour notre cas d'étude, nous avons retenu la méthode de corrélation adaptative. Il s'agit, en fait, de diviser l'image en plusieurs zones d'interrogations de taille 24x24 pixels, et de calculer le champ de vitesse sur chaque fenêtre en évaluant le déplacement moyen des traceurs. Par la suite, il s'agit d'évaluer la déformation et de calculer avec plus de précision la vitesse de l'écoulement sur une fenêtre allant jusqu'à 12x12 pixels.

#### 4.4.2.2 Eléments constitutifs du dispositif PIV

Globalement, la technique de PIV repose sur quatre éléments fondamentaux :

- L'ensemencement qui doit être bien adapté à la nature de l'écoulement,
- La source lumineuse : la nappe laser doit être bien positionnée et la zone d'étude doit être éclairée d'une façon homogène,
- La caméra numérique CCD qui permet l'acquisition des images,
- Les logiciels de traitement des images . Nous avons utilisé le logiciel Insight 4G de TSI pour le dispositif de Couette-Taylor, et le logiciel FlowManager de Dantec pour l'écoulement autour d'un barreau.

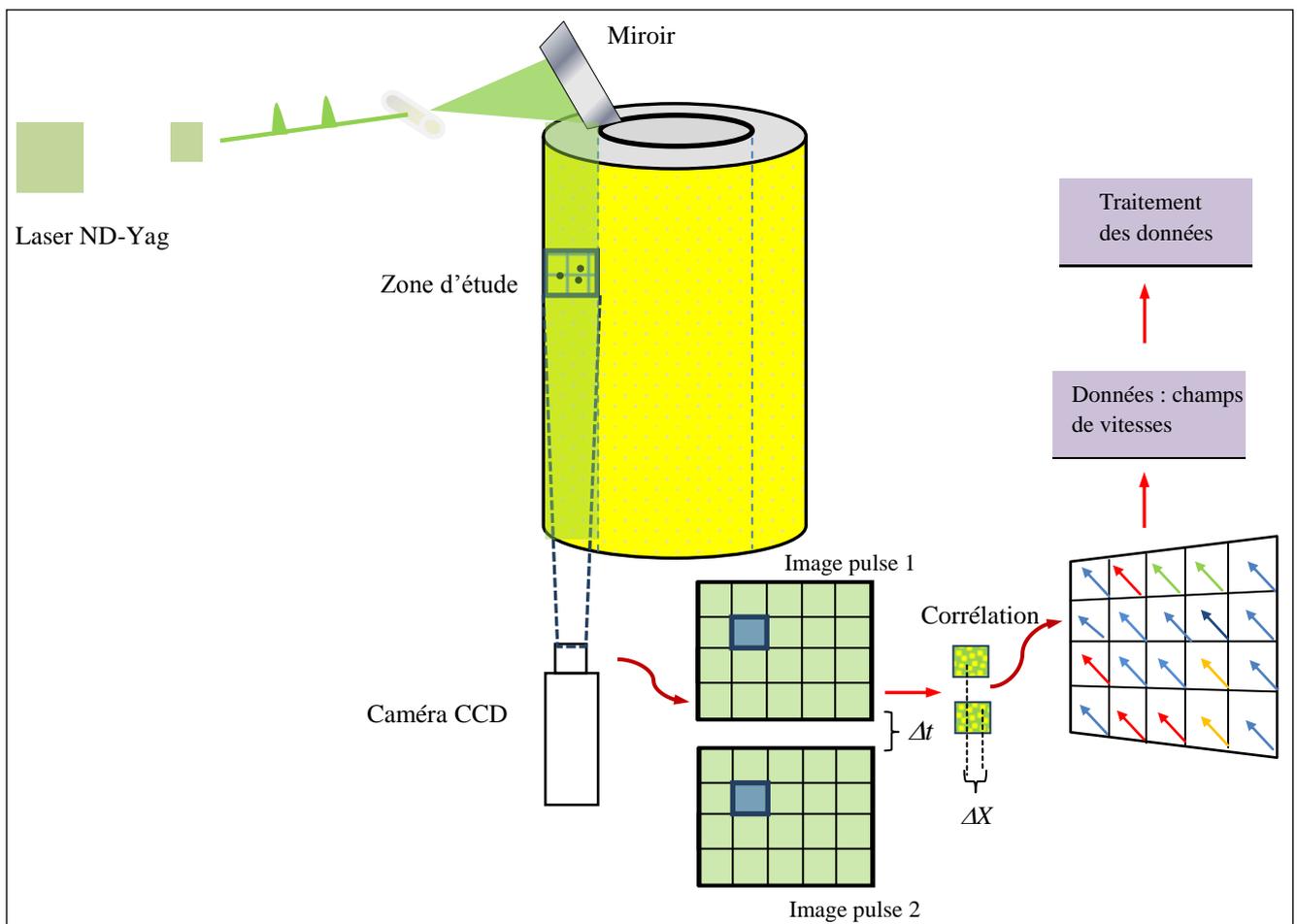


Figure.4.8 : Principe de la technique PIV pour un écoulement de Couette-Taylor

#### L'ensemencement

L'ensemencement doit répondre à plusieurs critères afin d'obtenir une reconstitution correcte des champs de vitesse. Les particules doivent avoir une bonne diffusion de la lumière du laser, qui peut être optimisée en augmentant la taille des particules. Cependant, ces particules doivent être de taille suffisamment petite afin de suivre convenablement l'écoulement sans introduire de perturbations. Généralement, dans la pratique, l'optimisation de la diffusion de la lumière se fait en jouant sur la luminosité du laser. D'autre part, contrairement aux

techniques de visualisation, déjà explicitées précédemment, la répartition de l'ensemencement doit être homogène sur toute la zone étudiée.

Dans notre cas d'étude, nous avons utilisé des particules sphériques de polyamide de diamètre moyen d'environ  $50 \mu m$  et de masse volumique proche de celle de l'eau ( $1,03 \text{ g/cm}^3$ ) avec un indice de réfraction de 1,5.

Ces particules ont été choisies pour leurs aptitudes de suivre le mouvement de la solution utilisée sans introduire des perturbations et pour leur faible sédimentation ainsi que leur bon indice de réfraction. Une fois dans la solution, la dispersion de ces particules devient homogène et s'adapte bien avec la couleur jaunâtre de la solution polarographique.

### **La source lumineuse : le laser**

Le choix du laser repose sur son énergie délivrée, qui doit être assez suffisante et répartie le plus uniformément possible afin de permettre une meilleure intensité lumineuse diffusée par les particules d'ensemencement.

Le laser utilisé dans notre étude pour réaliser les mesures par PIV ainsi que la synchronisation entre les deux techniques de PIV et de polarographie, est un laser Nd-YAG (Neodymium-doped Yttrium Aluminium Garnet) pulsé de marque *Quanta-Ray* émettant à une longueur d'onde fondamentale dans l'infrarouge (1064 nm). Un dédoublement de fréquence est effectué afin d'obtenir une lumière dans le spectre visible (532 nm). Le faisceau laser est pulsé et cette pulsation peut être réglée manuellement grâce à un interrupteur (Q-Switch) dans la cavité.

Le délai entre deux pulses laser est dictée par la sensibilité de la caméra et les vitesses caractéristiques de l'écoulement.

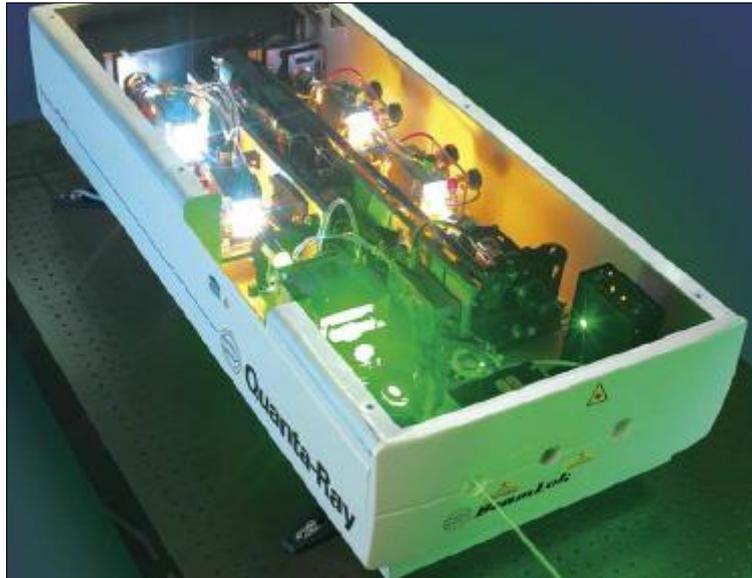
Le plan laser appliqué sur la zone d'étude est obtenu grâce à une lentille demi-cylindrique divergente placée à la sortie du faisceau laser et permettant la divergence de la nappe laser. Une lentille hémisphérique convergente de grande longueur focale, est positionnée par la suite, afin de limiter l'épaississement de la nappe laser.

L'énergie maximale de chaque impulsion laser est de  $200 \text{ mJ}$  pendant 8 ns. Les impulsions lumineuses proviennent de deux cavités indépendantes ; ce qui permet d'avoir deux pulses d'intensités indépendantes de l'écart entre les impulsions.

Les principales caractéristiques du laser utilisé sont regroupées dans le tableau 9 ci-après.

<i>Longueur d'onde</i>	<i>532 nm</i>
<i>Énergie d'impulsion</i>	<i>200 mJ/Pulse</i>
<i>Fréquence des pulses laser</i>	<i>15 Hz</i>
<i>Temps d'impulsion laser</i>	<i>6 - 9 ns</i>
<i>Diamètre du faisceau laser à la sortie</i>	<i>&lt; 1 mm</i>
<i>Divergence (angle d'ouverture) : 2mrad</i>	<i>0,5 mrad</i>

**Tableau 9:** Caractéristique du laser Nd-YAG pulsé Quanta-Ray



**Figure 4.9 :** Photographie du laser Nd-YAG pulsé Quanta-Ray (capot ouvert)

### **Acquisition : Caméra**

Le principe de la technique PIV repose sur la superposition des deux images successives permettant de remonter au déplacement des particules du traceur entre deux instants différents  $t$  et  $t + \Delta t$ .

Afin de pouvoir enregistrer ce doublet d'images, une caméra numérique (figure 4.10) équipée d'un capteur CCD (Charge Coupled Device) est nécessaire. Il s'agit d'un capteur photoélectrique qui sert à transformer les photons reçus durant chaque pulse laser (diffusion de la lumière par les particules réfléchissantes) en un signal électron. Ainsi, le nombre d'électrons collectés est proportionnel à la quantité de lumière reçue. Par suite, les charges accumulées dans chaque photosite ou cellule de stockage du CCD sont converties en un signal tension qui est filtré et numérisé à la sortie du capteur CCD. La résolution du capteur dépend du nombre de ces photosites permettant par la suite d'obtenir autant de pixels au niveau d'une image.

Dans notre cas d'étude, la caméra utilisée est de type « *PowerView Plus* » de résolution 2 millions de pixels ; soit une taille d'image de 1600 x 1200 pixels. Cette caméra, munie d'un

objectif de focale fixe égale à 60 mm, est synchronisée au laser et possède une fréquence d'acquisition de couples d'images  $f = 15$  Hz pour toutes les mesures.

Une carte PCI 64 bits de traitement d'images permet de connecter la caméra à l'unité de traitement et assure ainsi l'opération de transfert des données à une vitesse adéquate aux mesures de PIV.



Figure 4.10 : Caméra « *PowerView Plus* »

### **Traitement des couples d'images acquises**

Les images reçues de la caméra sont ensuite traitées et converties en fichier de données, permettant de tracer une carte des champs de vitesse de l'écoulement. Le logiciel de traitement utilisé dans notre cas est *Insight 4G* développé par *TSI*.

Lors des traitements, nous avons utilisé une méthode de corrélation spatiale de la zone d'interrogation entre les deux instants enregistrés. Cette méthode donne ainsi accès à un champ 2D des projections de vitesses de l'écoulement dans le plan laser.

Un taux de recouvrement des zones d'interrogation de 50% est appliqué afin de réduire l'espacement de la grille des vitesses. Ceci ne modifie cependant pas la résolution spatiale.

### **4.4.3 Méthode polarographique**

Dans cette partie, nous présenterons les différents moyens employés pour l'application de la méthode polarographique à notre configuration d'étude.

#### **4.4.3.1 Réactifs électrochimiques : solution polarographique**

À l'issus de la synthèse bibliographique, nous avons choisi dans notre cas d'étude, le couple ferricyanure/ferrocyanure de potassium comme couple oxydo-réducteur pour la mise en œuvre de la méthode polarographique.

L'équation de la réaction chimique propre à ce couple s'écrit :



La solution polarographique préparée est réalisée à partir d'un mélange du couple ferri/ferrocyanure de potassium avec une concentration de la solution = 25 mol /m<sup>3</sup>.

Le sulfate de potassium (K<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>) a été choisi comme électrolyte inerte à une concentration de 200 mol/m<sup>3</sup>.

#### 4.4.3.2 Tension de polarisation

La tension de polarisation doit être choisie de manière à ce qu'elle corresponde à un transfert de masse optimal. Pour ce faire, nous traçons un polarogramme qui correspond à l'évolution du courant reçu par l'électrode en fonction de la tension de polarisation  $I = f(U_p)$

Nous rapportons sur la figure (4.11) quelques exemples de polarogrammes obtenus pour des sondes implantées sur le dispositif de Couette-Taylor pour un nombre de Taylor Ta=40. Les polarogrammes d'une même sonde circulaire simple pour deux différents nombres de Taylor différents Ta=40 et Ta=650 sont reportés sur la figure (4.12).

La réponse des différents segments de la sonde triple en courant limite de diffusion est rapportée sur la figure (4.13) afin de localiser le palier de courant et comparer ainsi ses limites à celles d'une sonde simple circulaire.

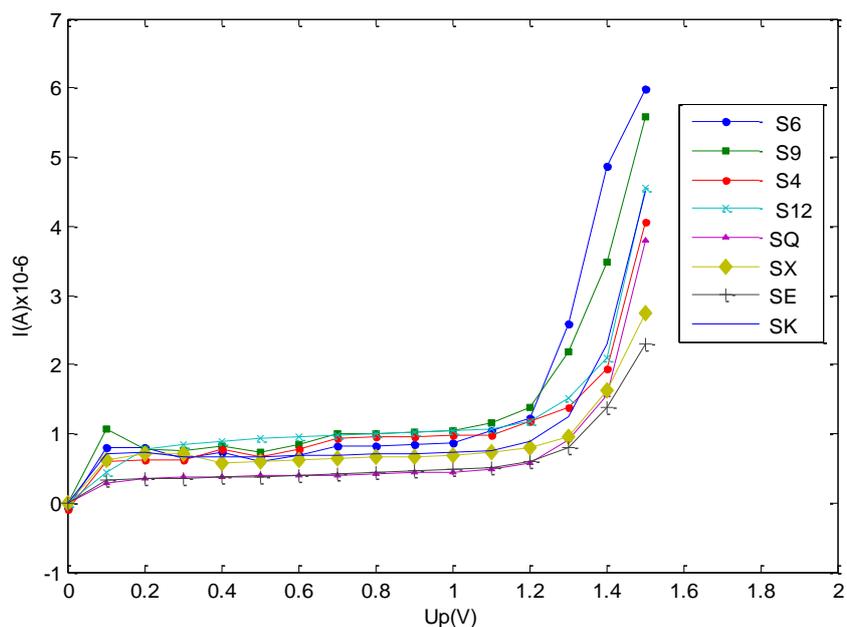
Ces polarogrammes présentent tous, une allure caractéristique constituées de trois zones différentes. Une première zone où l'évolution du courant croît en fonction de la tension de polarisation. Dans ce cas, la concentration du réactif à la surface de l'électrode est non nulle. Une deuxième zone qui est sous la forme d'un palier qui au cours duquel, la concentration du réactif à la surface de la sonde est nulle. Ainsi, le courant de diffusion devient alors indépendant de la tension de polarisation appliquée et la réaction est donc en régime de diffusion contrôlée. En effet, la tension de polarisation doit être alors choisie au niveau de ce plateau qui correspond à un courant limite de diffusion demeurant constant.

Une troisième zone, où le courant reprend sa croissance en fonction de la tension de polarisation. D'autres réactions interviennent dans ce cas, comme la réaction de l'électrolyse de l'eau, par exemple.

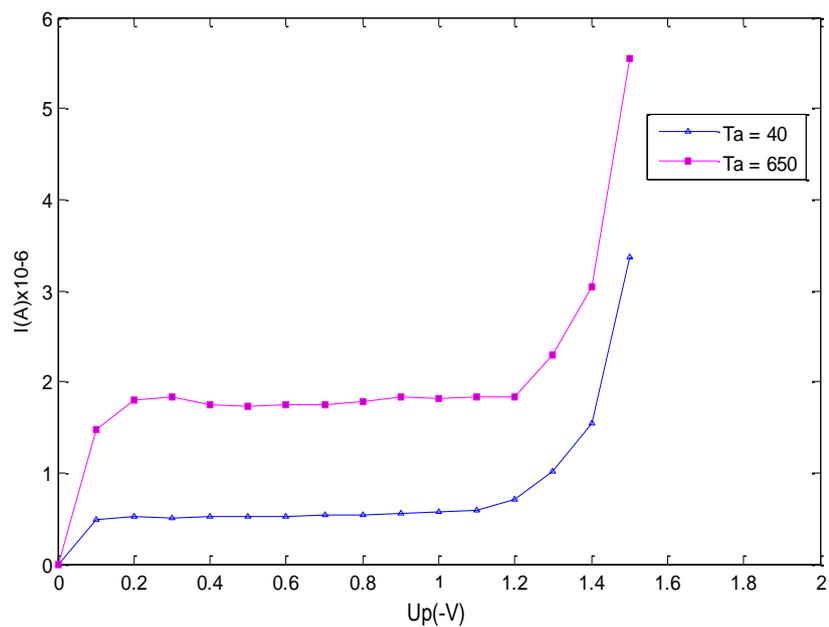
D'après ces polarogrammes, le palier du courant limite est localisé pour des valeurs de la tension de polarisation comprises entre -1100 mV et -300 mV.

Dans le cas de la sonde triple, le palier de courant de diffusion des trois segments de la sonde garde pratiquement les mêmes limites que celui observé dans le cas des sondes simples circulaires.

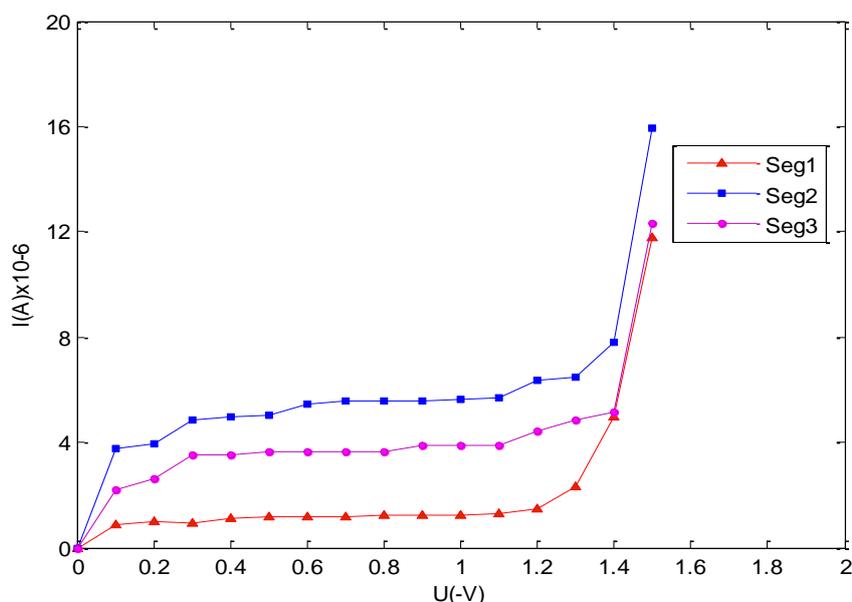
Notre choix s'est fixé alors sur une valeur optimale  $U_p = -800 \text{ mV}$  pour toutes les mesures polarographiques de notre étude expérimentale.



**Figure 4.11** : Exemples de polarogrammes pour des sondes horizontales et verticales simples ( $T_a=40$ )



**Figure 4.12** : Polarogrammes d'une sonde simple pour deux régimes différents ( $T_a=40$  et  $T_a=650$ )



**Figure 4.13** : Polarogrammes des courants limites de diffusion délivrés par une sonde triple en fonction de la tension de polarisation  $U_p$  ( $T_a = 40$ )

#### 4.4.3.3 Coefficient de diffusion moléculaire de la solution polarographique

Le coefficient de diffusion moléculaire de l'espèce active peut être déterminé à partir du modèle d'équation élaborée par Levich (1962) pour une électrode implantée sur un disque tournant dans un fluide newtonien. Le principe de cette méthode consiste à polariser l'électrode ; ce qui permet de créer un courant de diffusion. Une fois l'électrode est en rotation, les ions réduits à sa surface vont migrer par centrifugation outre que la diffusion. Levich a alors établi une solution analytique en régime permanent reliant le courant limite de diffusion au niveau de l'électrode à la vitesse de rotation du disque :

$$I = 0,620 . n . F . A . C . \nu^{-\frac{1}{6}} D^{\frac{2}{3}} . \omega^{\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

avec :

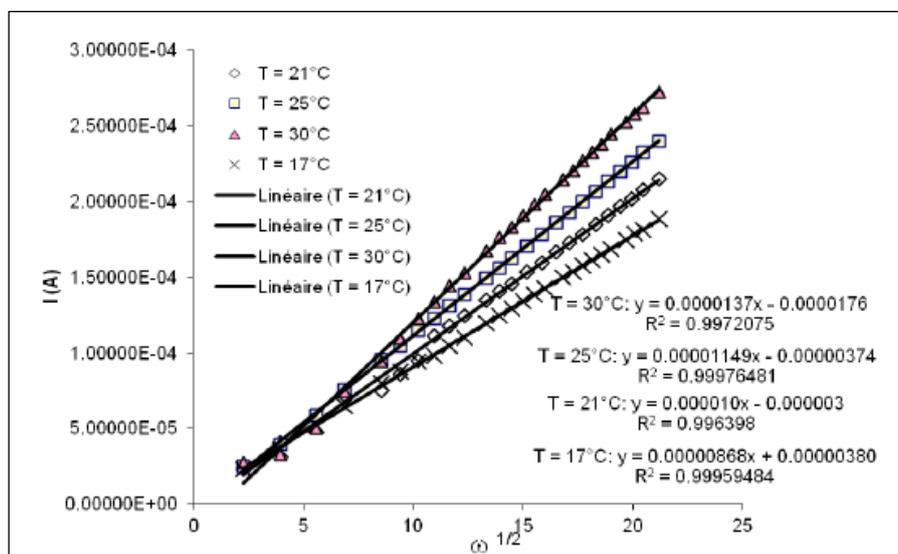
$I$  représentant le courant de Levich,  $n$  le nombre d'électrons mis en jeu,  $F$  la constante de Faraday,  $A$  la surface active de l'électrode,  $C$  la concentration de la solution (ion actif),  $D$  le coefficient de diffusion moléculaire de la solution,  $\nu$  la viscosité cinématique et  $\omega$  la vitesse de rotation du disque (rad/s).

On regroupant dans ce cas toutes les constantes de l'expression (4.2) dans un seul terme  $\alpha_L = 0,620nFAC\nu^{-\frac{1}{6}}D^{\frac{2}{3}}$ , et en représentant l'évolution  $I = f(\omega^{\frac{1}{2}})$ , on pourra remonter à la valeur du coefficient de diffusion moléculaire  $D$  au moyen d'une résolution graphique permettant de trouver le terme  $\alpha_L$ .

Berrich (2011) a utilisé la même approche pour mesurer le coefficient de diffusion pour une solution de ferri/ferrocyanure de potassium équimolaire (à  $25 \text{ mol/m}^3$ ) avec  $200 \text{ mol/m}^3$  de

sulfate de potassium ( $K_2SO_4$ ) comme électrolyte inerte. La démarche a été ainsi reproduite pour différentes températures (figure 4.14).

Nous avons utilisé pour notre cas d'étude ces mêmes résultats obtenus pour une même solution polarographique (Berrich et al., 2013). Les propriétés de la solution polarographique utilisée sont résumées dans le tableau 10.



**Figure 4.14** : Évolution du courant de Levich (1962) en fonction de la vitesse de rotation du disque (Berrich, 2011)

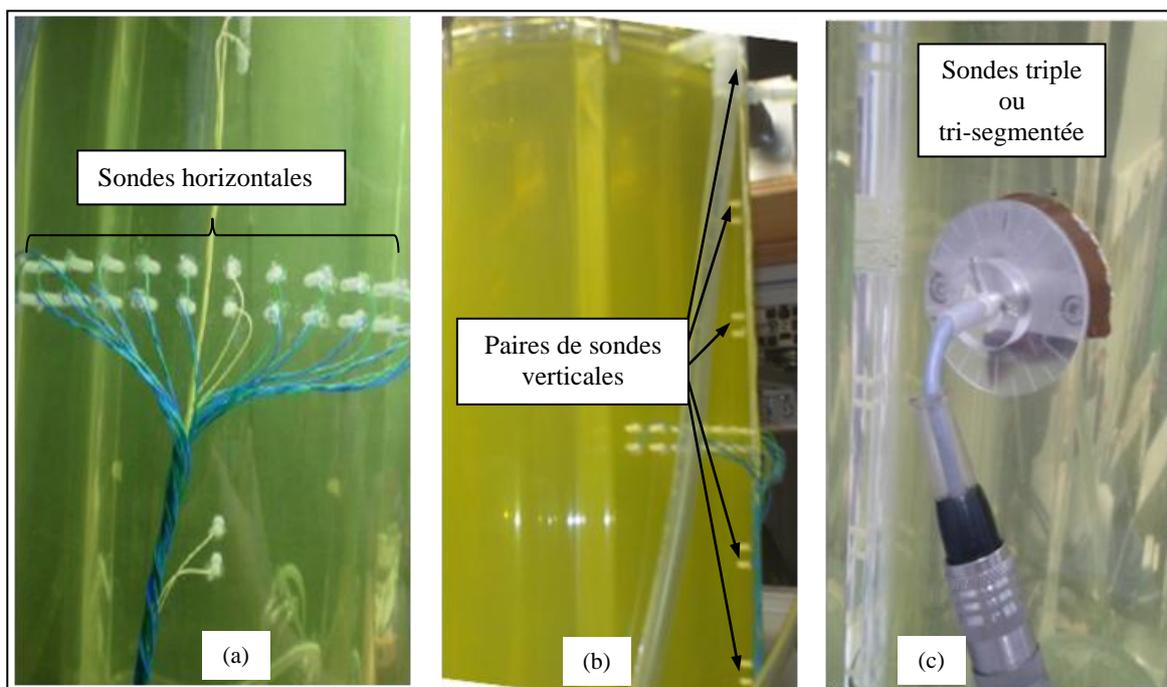
Couple oxydo-réducteur	Ferri/ferrocyanure de potassium $Fe(CN)_6^{3-} / Fe(CN)_6^{4-}$
Concentration	25 mol/m <sup>3</sup>
Électrolyte inerte	Sulfate de Potassium $K_2SO_4$ (200 mol/m <sup>3</sup> )
Viscosité dynamique	0,997x10 <sup>-6</sup> Pa.s à 20°C
Coefficient de Diffusion	≈8,17x10 <sup>-10</sup> m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>

**Tableau 10**: Caractéristique de la solution électrochimique

#### 4.4.3.4 Sondes polarographiques

Afin d'assurer les mesures polarographiques, nous disposons de trente-huit sondes simples circulaires et d'une sonde triple, affleurant la paroi intérieure du cylindre externe fixe (figure 4.15). Les sondes simples ont été implantées selon une rangée verticale et deux rangées horizontales affleurant ainsi le fluide dans l'espace annulaire (voir figure 4.5). Ces sondes sont fabriquées à partir d'un fil de platine isolé de l'extérieur. Elles sont alors fixées (collage) sur la géométrie courbée de la paroi interne du cylindre immobile. Ces opérations d'implantation des sondes électrochimiques sur un tel type de surface s'avèrent ardues et entraîne une légère altération de sa géométrie.

Des microphotographies permettant de déterminer le diamètre réel d'une microélectrode, révèlent l'existence de rugosités sur la surface des sondes (figure 4.16). Sur le tableau 11, un exemple de caractéristiques de l'une des sondes simples circulaires utilisées est donné.



**Figure 4.15** : Photos des dispositions des sondes simples : a) Rangée horizontale ; b) Rangée verticale; c) Sonde triple

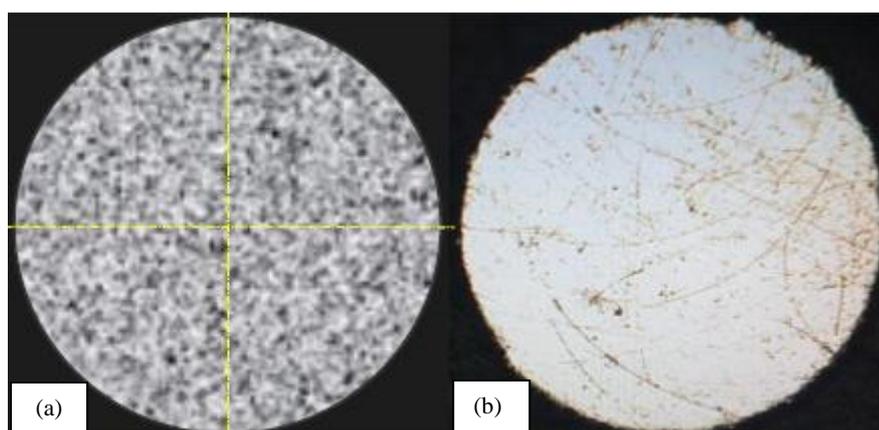


Figure 4.16. Sonde circulaire simple utilisée :  
a) Géométrie idéale ; b) Microphotographie d'une sonde réelle (Berrich, 2011)

Type de la sonde	Sonde circulaire simple
Matériau	Platine
Surface idéale ( $mm^2$ )	0,1963
Surface réelle	0,1933
Périmètre idéal	1,5707
Périmètre réel ( $mm$ )	1,8327

**Tableau 11**: Caractéristique d'une sonde simple circulaire utilisée

En effet, on remarque bien que la surface active des sondes électrochimiques est dans la plupart du temps différente que la section du fil de platine en question qui la constitue. Ainsi, un étalonnage préalable s'avère nécessaire afin de déterminer les vraies surfaces actives des différentes sondes électrochimiques. Parmi les méthodes d'étalonnage employées, nous avons

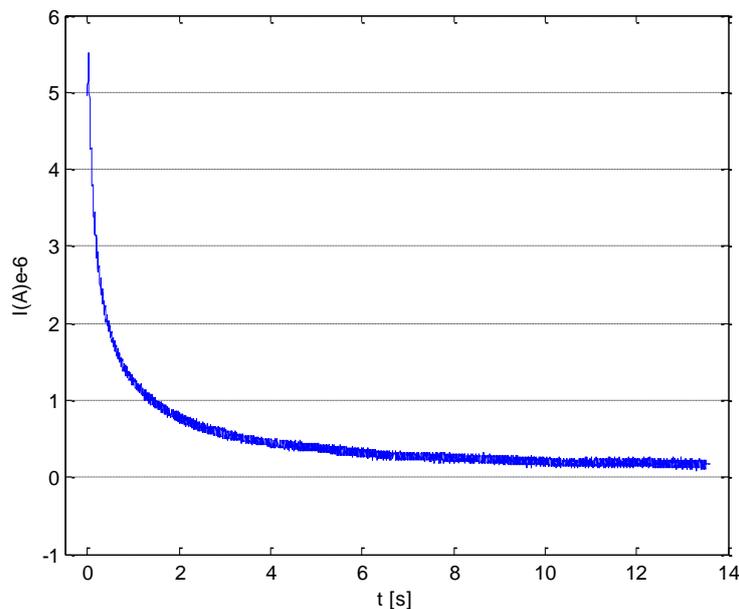
utilisé celle de l'asymptote de Cottrell, basée sur la réponse d'une sonde à un échelon de potentiel.

Il s'agit alors d'imposer un saut de potentiel instantané sur la sonde électrochimique et suivre sa réponse en courant de diffusion au cours du temps (Sobolik et al., 1998).

D'après la seconde loi de Fick, le courant limite de diffusion évolue selon l'inverse de la racine carrée du temps :

$$I(t) = nFAC \left( \frac{D}{\pi t} \right)^{1/2} = \alpha_{cot} t^{-1/2} \quad (4.3)$$

La figure (4.17) ci-dessous illustre bien un exemple de réponse à un échelon de tension d'une sonde électrochimique utilisée lors de notre étude.

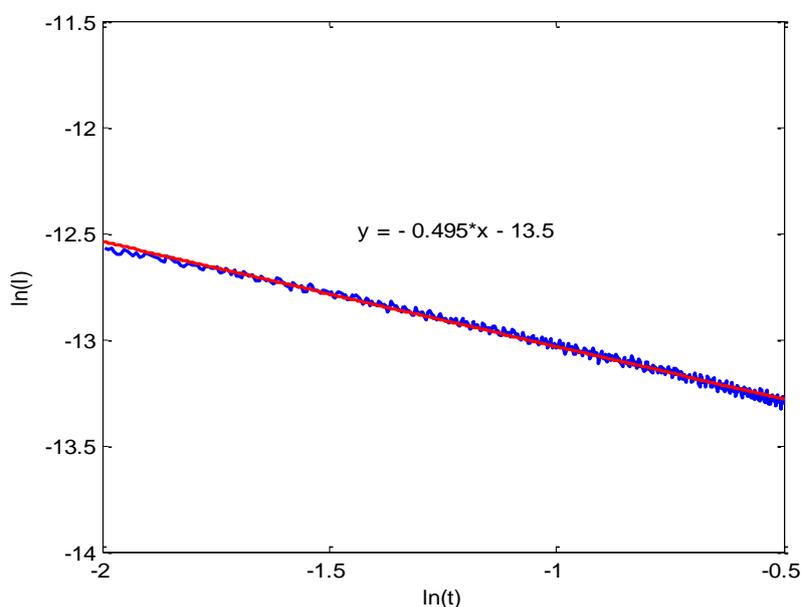


**Figure 4.17** : Réponse d'une sonde électrochimique à un échelon de tension (sonde n°3)

En passant l'expression (4.3) en écriture logarithmique et en traçant la réponse en courant de diffusion en fonction du temps  $\ln(I) = f(\ln(t))$ , on obtiendra alors en régime transitoire une affine de pente égale à  $-1/2$ .

Nous présentons sur la figure (4.18) l'asymptote de Cottrell obtenue pour une des sondes électrochimiques implantées sur notre dispositif expérimental. Cependant, il est utile de noter que l'évolution du courant qui est proportionnel à  $t^{1/2}$ , n'est obtenue que sur une certaine portion de la courbe qu'il faut bien cerner afin de pouvoir déterminer correctement le coefficient  $\alpha_{cot}$ . Toutefois, sur certaines sondes, la réponse était écartée de plus de 10% ; ce qui a induit à une incertitude importante sur l'estimation de la surface active de la sonde considérée. Un récapitulatif des différents diamètres des surfaces actives des sondes implantées sur le dispositif, obtenus par la méthode de Cottrell, est donné sur le tableau 12. Ces diamètres ensuite comparés à ceux obtenus par Berrich (2011) en utilisant sur le même système de Couette Taylor. On remarque que les valeurs obtenues diffèrent de la valeur idéale

du diamètre de fil de platine utilisé, d'une part, et d'autre part celles-ci sont légèrement fluctuantes par rapport aux valeurs de Berrich (2011). Ceci pourrait être dû probablement aux opérations de collage ou du dépôt des résidus de particules d'ensemencement sur les sondes.



**Figure 4.18** : Asymptote de Cottrell (sonde n°3)

Sonde	Diamètre calculé (mm)	Berrich (2011)	Sonde	Diamètre calculé (mm)	Berrich (2011)	Sonde	Diamètre calculé (mm)	Berrich (2011)
S1	0,20150	0,23	SA	0,18233	0,24	SM	0,21078	0,249
S2	0,21184	0,23	SB	0,19168	0,186	SN	0,17344	0,253
S3	0,21184	0,231	SC	0,19498	0,21	SO	0,21829	0,255
S4	0,21396	0,232	SD	0,19498	0,269	SP	0,20353	0,269
S5	0,21078	0,246	SE	0,17344	0,267	SQ	0,19360	0,245
S6	0,20150	0,176	SF	0,17344	0,256	SR	0,19360	0,245
S7	0,19168	0,265	SG	0,18233	0,256	SS	0,21396	0,25
S8	0,18122	0,254	SH	0,18233	0,231	ST	-----	0,257
S9	0,20150	0,251	SI	0,17344	0,267	SU	-----	0,257
S10	0,19850	0,256	SJ	0,20150	0,319	SV	0,23884	0,243
S11	0,20764	0,276	SK	0,20150	0,269	SW	0,24612	0,245
S12	0,20353	0,273	SL	0,20150	0,246	SX	0,24004	0,246
S13	0,20764	0,276						
S14	0,21078	0,271						

**Tableau 12:** Valeurs des diamètres actifs (en mm) des sondes du SCT utilisé, estimés par l'asymptote de Cottrell et comparée à ceux obtenu par Berrich (2011)

### Sonde Triple (tri-segmentée)

La sonde triple utilisée lors de cette étude a été fabriquée par le professeur Sobolik à l'Université de la Rochelle et à l'Institut de Génie Chimique de Prague (République Tchèque). Cette sonde est composée de trois fils en platine, assemblés par étirement dans un gabarie cylindrique et formant une sonde circulaire de diamètre total  $D=0,5 \text{ mm}$ . Les trois segments composant cette section circulaire font idéalement un angle de  $120^\circ$  entre eux. Avant leurs étirement, les fils sont revêtus par une couche de peinture polymérique collée à l'aide d'une résine d'époxy. Ces derniers sont introduits dans un tube en acier inoxydable de diamètre  $3\text{mm}$ . Les détails sur la fabrication de cette sonde tri-segmentée, sont bien décrits dans la publication de Sobolik et al. (2011).

La sonde est montée sur l'une des paroi latérale extérieure plane du bloc cylindre externe immobile. Cette sonde affleure la surface intérieure courbée du cylindre fixe, donc affleure le fluide en écoulement dans l'entrefer. Elle a été positionnée dans un plan méridien par rapport aux deux rangées parallèles et horizontales des sondes simples.

La sonde triple utilisée dans notre cas d'étude ne correspond pas à la sonde idéale introduite par Sobolik et al. (2011). En effet, des rugosités sont présentes sur son contour, la rendant pratiquement non circulaire, d'une part, et d'autre part, les épaisseurs des frontières ne sont pas forcément négligeables. Ces irrégularités entraînent des altérités au niveau des résultats obtenus et comparés à ceux d'une sonde idéale (théorie de la sonde triple).

Les caractéristiques géométriques de la sonde triple utilisée sur le dispositif de Couette-Taylor sont regroupées dans le tableau 13 (Berrich, 2011).

Type de la sonde	Sonde circulaire tri-segmenté
Matériau	Platine
Surface idéale ( $\text{mm}^2$ )	0,19635
Surface réelle ( $\text{mm}^2$ ) :	Segment n°1 0,0684
	Segment n°2 0,0733
	Segment n°3 0,0759
Longueur de la frontière isolante (mm)	Segment n°1 0,0348
	Segment n°2 0,395
	Segment n°3 0,0388

**Tableau 13:** Caractéristique de la sonde circulaire tri-segmentée utilisée

#### 4.4.4 Synchronisation des mesures de PIV et d'électrochimie

La synchronisation des mesures de PIV et d'électrochimie permet d'analyser les interactions entre tourbillons et paroi. En effet, la carte des champs des vitesses ainsi que les mécanismes d'évolution des instabilités sont obtenus par la PIV et conjointement l'électrochimie permet de recueillir les informations sur les interactions de ces instabilités avec la paroi. Par ailleurs, cette synchronisation des méthodes permet de comparer les gradients pariétaux de vitesses obtenus par les sondes et ceux retrouvés selon les mesures par PIV au-dessus de chaque sonde en très proche paroi.

Cependant, la mise en place de cette méthode reste expérimentalement assez délicate. Il s'agit alors de ramener les deux techniques expérimentales à la même échelle de temps ; ce qui nécessiterait une intervention de l'expérimentateur lors du déclenchement des mesures par les deux techniques ; ce qui peut induire des sources d'erreurs.

Afin de minimiser ce risque, nous avons mis en place avec les techniques de mesures utilisées un trigger externe (bouton poussoir) lié à un générateur de fréquence (signal TTL) permettant ainsi de synchroniser les mesures par PIV avec celles utilisant la méthode électrochimique. Cette démarche consiste en fait à déclencher grâce au signal TTL du trigger externe le processeur du système de PIV (laser et caméra) pour lancer les acquisitions des champs de vitesses instantanés, et en même temps enregistrer ce signal TTL simultanément avec les mesures électrochimiques. Ce signal TTL issu du trigger externe permet alors de déterminer les instants pendant lesquels les clichés obtenus par PIV ont été pris afin de les faire correspondre aux instants de début et de fin des mesures électrochimiques.

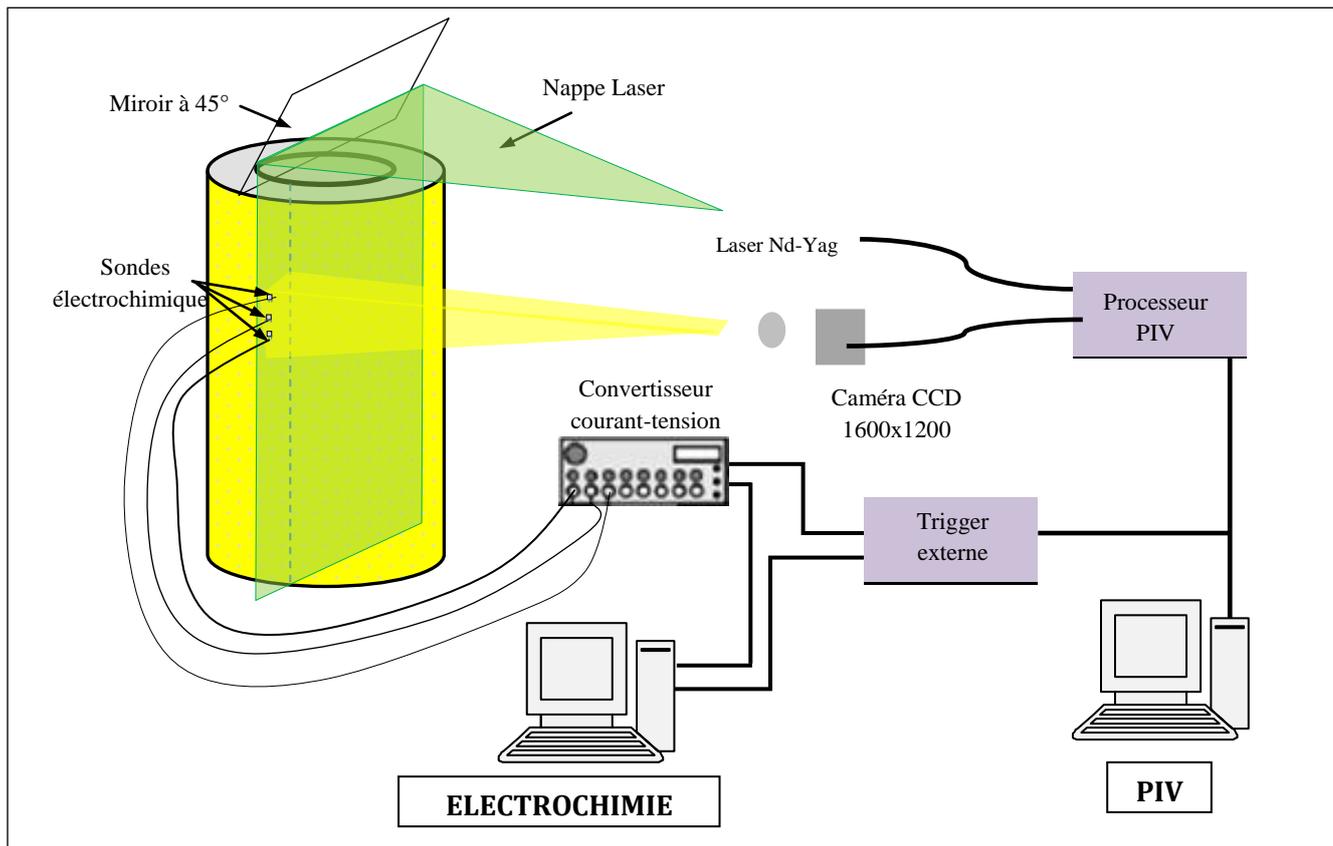
L'ensemble des mesures est acquis grâce à une carte d'acquisition Keithly (DAS 1800-ST) de résolution 12 bits, à une fréquence d'échantillonnage  $f_e=1000$  Hz. Cette carte est gérée automatiquement par le logiciel TestPoint de Keithly, utilisé comme serveur par rapport à un client qui est le logiciel Matlab. Un deuxième ordinateur, commandé par le trigger externe, permet de lancer les acquisitions par PIV. La démarche de la méthode de synchronisation est illustrée par la figure (4.19).

Pour résumer, le processus de mesures synchronisées consiste alors à :

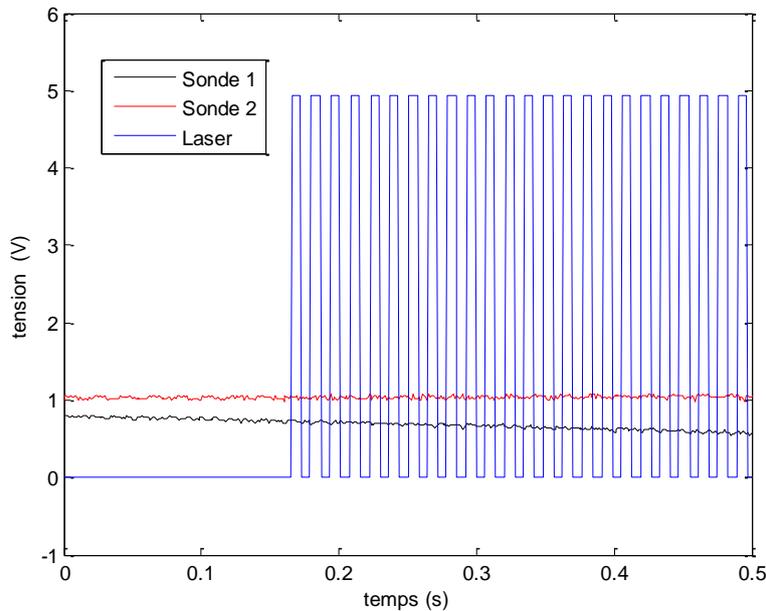
- Lancer dans un premier temps, grâce à une interface programmée sous Matlab, les mesures électrochimiques ainsi que les signaux des deux pulses laser et le signal (TTL) du trigger externe sur un premier ordinateur.
- Déclencher à l'aide du trigger externe (signal TTL) les acquisitions par PIV des champs de vitesses instantanés sur un second ordinateur.

Sur la figure (4.20), nous présentons un exemple d'une acquisition synchronisée de PIV et électrochimie. La figure montre les signaux de la réponse de deux sondes circulaires simples superposées au signal TTL du trigger externe. Les acquisitions par PIV sont alors déclenchées dans ce cas là à  $t_I=0,16$  s.

Afin de synchroniser les mesures électrochimiques avec les acquisitions des champs de vitesses obtenus par PIV, l'origine de l'axe de temps est considéré égale à  $t_I$ .



**Figure 4.19** : Principe de la technique de synchronisation PIV-électrochimie pour un écoulement de Couette-Taylor



**Figure 4.20** : Signal TTL superposé à la réponse des sondes électrochimiques

#### 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, deux dispositifs expérimentaux permettant de générer des écoulements riches en instabilités ont été décrits en détails : le canal hydraulique permettant l'étude d'un écoulement autour d'un obstacle et le dispositif de Couette-Taylor constitué d'un cylindre extérieur fixe et un cylindre interne mobile avec rapport radial  $\eta=0,855$ . Les différents constituants des deux dispositifs ont été présentés. Dans le cadre de notre étude expérimentale, différentes techniques de mesures et de visualisation ont été employées (visualisation à l'aide des particules de Kalliroscope. Ces différentes ont été décrites dans ce chapitre. Une description de la technique de synchronisation des mesures des champs de vitesses instantanés (par PIV), et de frottement pariétal, déterminé par la méthode polarographique, a été également effectuée. Cette synchronisation permet de déterminer simultanément les tourbillons et leurs empreintes sur la paroi interne du cylindre extérieur.

Les résultats obtenus à l'aide de ces dispositifs expérimentaux seront présentés dans le dernier chapitre. L'application de la technique de PIV à l'écoulement derrière un obstacle dans le canal hydraulique, servira surtout à valider notre code de simulation numérique basé sur la méthode de Lattice Boltzmann.



## **-Chapitre V-**

Étude expérimentale des écoulements  
tourbillonnaires et des transferts



## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats issus des mesures expérimentales effectuées lors de nos travaux de recherche durant cette thèse sur deux types d'écoulements tourbillonnaires. Ces résultats de mesures ont été obtenus aux laboratoires GEPEA à Nantes, LESTE à l'Université de Monastir (Tunisie) et TEMPO à Valenciennes, sur les deux dispositifs expérimentaux qui ont été déjà décrits dans le chapitre précédent.

A cet effet, nous nous sommes intéressés dans une première partie, à l'exploitation des résultats de mesures effectuées sur deux bancs hydrauliques similaires. Ceci nous a servi, dans un premier lieu, à étudier expérimentalement la dynamique de l'écoulement tourbillonnaire confiné dans le sillage d'un obstacle de géométrie carrée et cylindrique. Les résultats obtenus sont alors utilisés par la suite pour tester la validité de notre code de simulation numérique (basé sur la méthode de Lattice Boltzmann), l'étude de la dynamique de l'écoulement tourbillonnaire. Les différentes méthodes utilisées pour la caractérisation des structures cohérentes présentes dans l'écoulement seront alors présentées.

Dans une seconde partie, nous présentons les résultats de mesures effectuées au laboratoire TEMPO de l'Université de Valenciennes sur un dispositif de Couette-Taylor. L'objectif est d'une part de caractériser un écoulement du type Couette-Taylor, et d'autre part d'étudier le mécanisme des interactions entre tourbillons et paroi. La topologie de l'écoulement sera ainsi détaillée pour un écoulement sans et avec écoulement axiale. Nous présentons en dernier lieu, les résultats concernant les mesures synchronisées effectuées par PIV et par électrochimie.

## 5.2 Étude d'un écoulement autour d'un obstacle carré dans un canal hydraulique

Dans cette étude expérimentale, nous exploitons les résultats bruts obtenus grâce à des mesures par PIV. Nos études ont porté sur des écoulements laminaires instationnaires autour d'un obstacle carré en milieu confiné ( $r=1/3$ ). Les nombres de Reynolds exploités sont alors relativement faibles et nous nous sommes restreints à une plage  $40 < Re < 150$ . Nous présentons tout d'abord la topologie de l'écoulement et le comportement du fluide selon la valeur du nombre de Reynolds ; ce qui nous permettra d'étudier les différents régimes d'écoulement et de vérifier la validité de notre code de simulation numérique LBM. Nous nous intéressons dans la deuxième partie, à la caractérisation des structures tourbillonnaires grâce à des outils de post-traitement des données que nous avons mis en place et qui permettent la détection des structures tourbillonnaires.

### 5.2.1 Topologie de l'écoulement

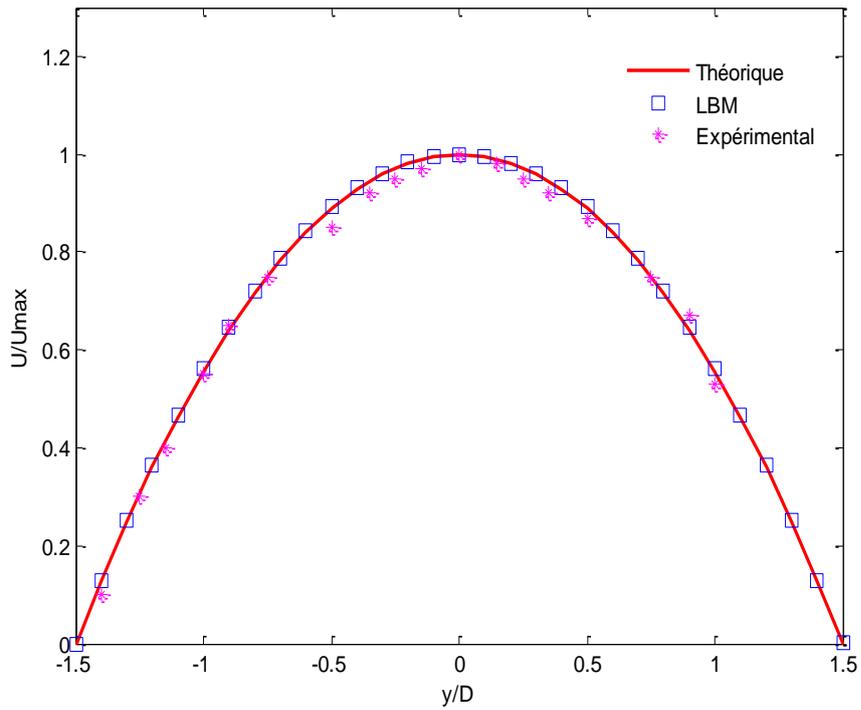
Les mesures de champs instantanés de vitesse ont été obtenues grâce à un système de PIV classique ;

Deux zones de l'écoulement ont été investiguées : une première zone située entre  $0 < x < 8D$  et une seconde entre  $9D < x < 17D$ , selon la direction axiale et entre  $-1,5D < y < 1,5D$  selon la direction verticale. Pour le post-traitement initial sur FlowManager, une corrélation adaptative a été utilisée pour des zones d'interrogation commençant des fenêtres de  $128 \times 128$  se terminant par  $32 \times 32$  pixels avec un recouvrement de 50%.

Nous procédons tout d'abord par vérifier si l'écoulement est bien développé dans le canal. Théoriquement, l'écoulement établi dans une conduite de section rectangulaire  $2a \times 2b$  ( $a = 150 \text{ mm}$  et  $b = 15 \text{ mm}$ ) obéit à l'équation de Lundgren et Sparrow (1964) présentée précédemment (Eq.3.28). Des mesures par PIV à l'amont et loin de l'obstacle sont alors effectuées en 2D dans un plan de mesure ( $Z = \text{cte}$ ). Ainsi, nous avons pu reconstituer le profil de vitesse à partir des mesures obtenues et le comparer au profil théorique. Nous remarquons une bonne concordance des résultats (Fig. 5.1).

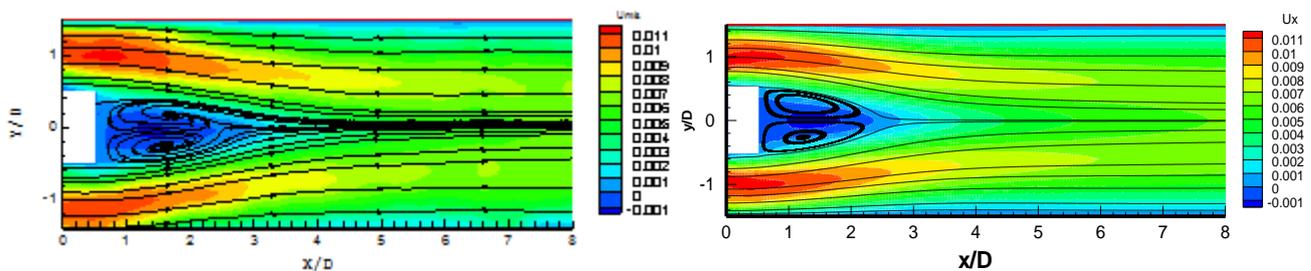
Afin de caractériser et délimiter les différents régimes d'écoulement en aval du cylindre, pour un gap et un confinement fixes, seul le nombre de Reynolds conditionne l'écoulement. Ce dernier a été défini expérimentalement par rapport à la vitesse débitante de l'écoulement  $U = \frac{Q}{S}$  où  $Q$  est le débit volumique et  $S$  est la section de la conduite rectangulaire.

Comme déjà évoqué au cours du second chapitre, la variation du nombre de Reynolds laisse apparaître différents régimes d'écoulements en aval du cylindre. Ces derniers seront alors présentés et comparés avec les résultats obtenus numériquement par la méthode de Lattice Boltzmann (LBM).

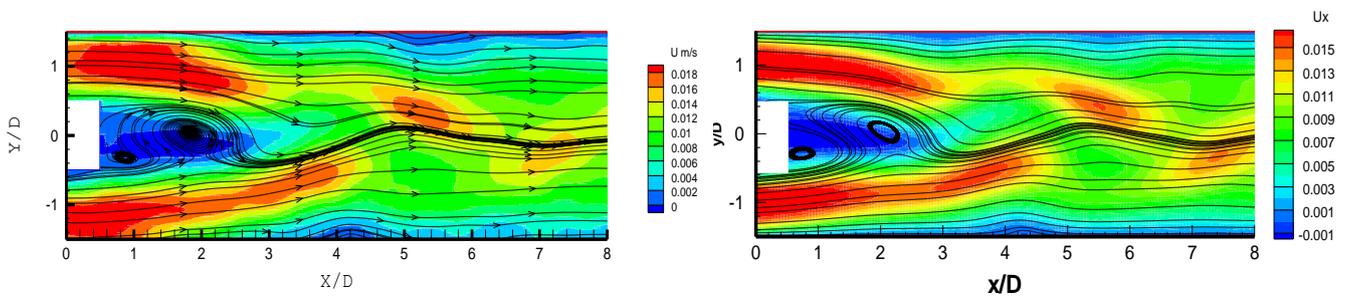


**Figure 5.1** : Profil de la composante  $U_x$  de vitesse au centre de la section sur la hauteur de la conduite dans le plan ( $Z=0$ )

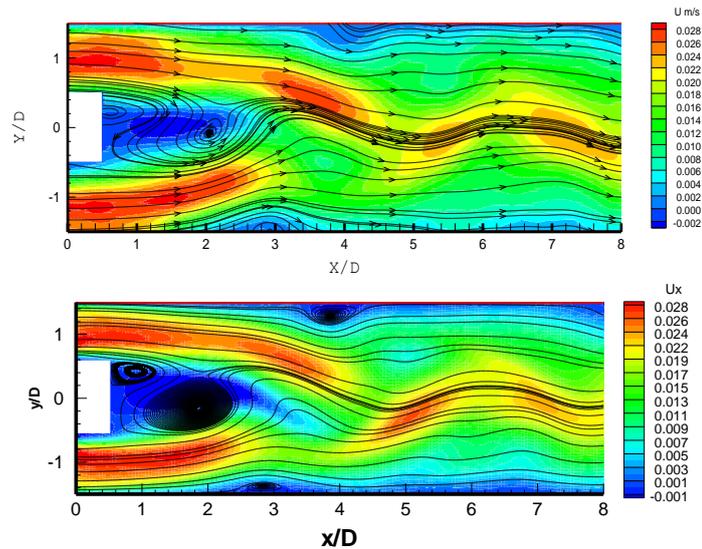
Les figures 5.2 à 5.4 présentent les lignes de courant superposées aux contours de vitesse pour les mêmes nombres de Reynolds utilisés lors de l'étude numérique. Ces derniers caractérisent chaque régime d'écoulement  $Re=50$ ,  $Re=80$  et  $Re=120$ .



**Figure 5.2** : Iso-contours de la composante axiale de vitesse et lignes de courant  $Re = 50$  : a) Résultat expérimental ; b) Résultats LBM



**Figure 5.3** : Iso-contours de la composante axiale de vitesse et lignes de courant  $Re = 80$  : a) Résultat expérimental ; b) Résultats LBM



**Figure 5.4** : Iso-contours de la composante axiale de vitesse et lignes de courant  $Re = 120$  : a) Résultat expérimental ; b) Résultats LBM

La comparaison qualitative entre les résultats expérimentaux et ceux issus de la simulation numériques montre une bonne concordance de point de vue forme du sillage. Pour un nombre de Reynolds relativement faible ( $Re=50$ ), deux tourbillons contrarotatifs apparaissent à l'aval immédiat de l'obstacle et le sillage est demeuré très stable.

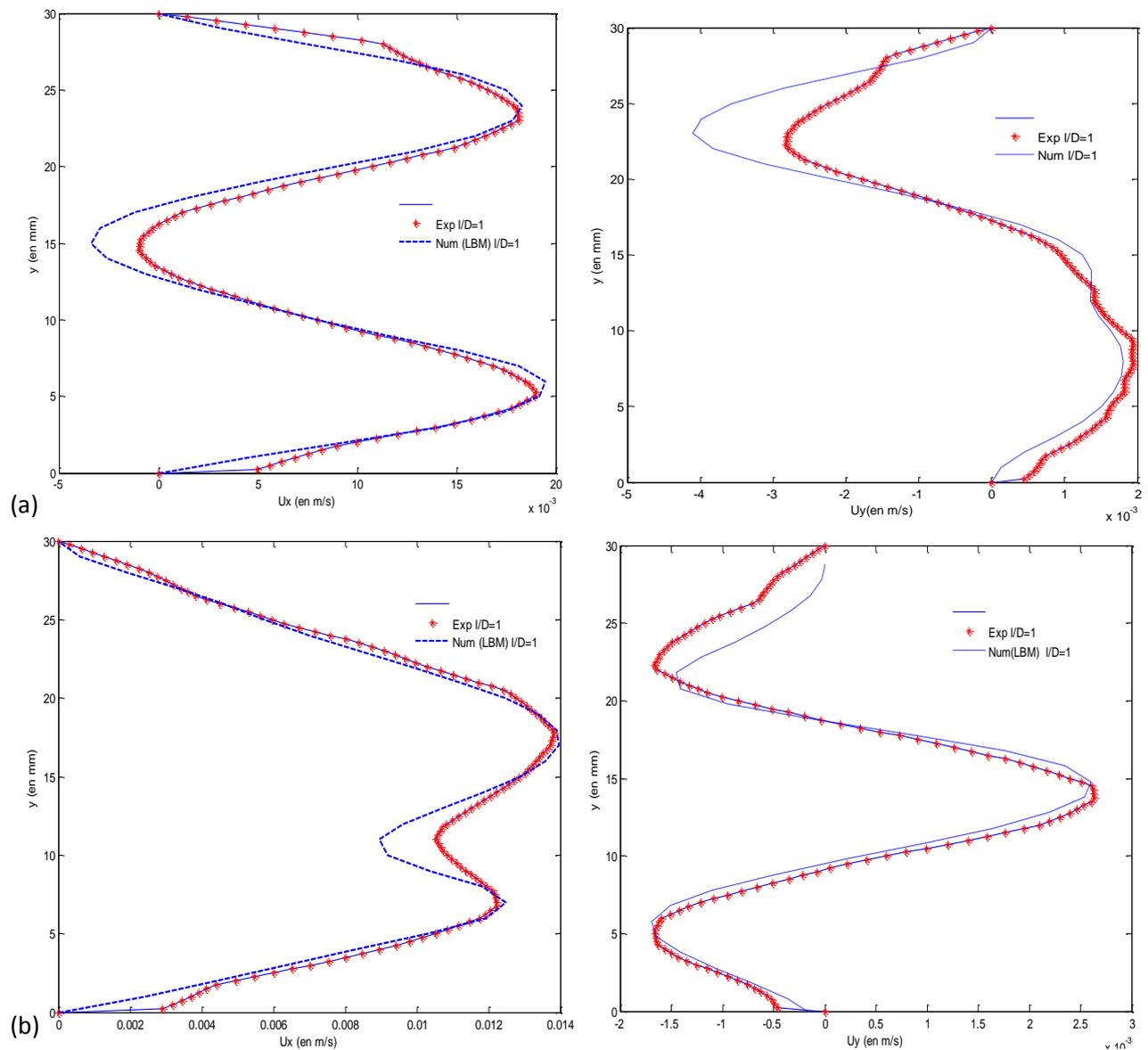
Les contours iso-vitesses et les lignes de courant obtenu expérimentalement et numériquement (LBM) pour un nombre de Reynolds  $Re=80$  montrent l'apparition des lâchers tourbillonnaires et un sillage qui commence à osciller. Expérimentalement, Réhimi (2006) a montré que l'apparition de ces lâchées à partir d'un Reynolds critique  $Re=66$  environ. Dans le cas de nos simulations, le nombre de Reynolds déterminé est de l'ordre de  $Re=72$ .

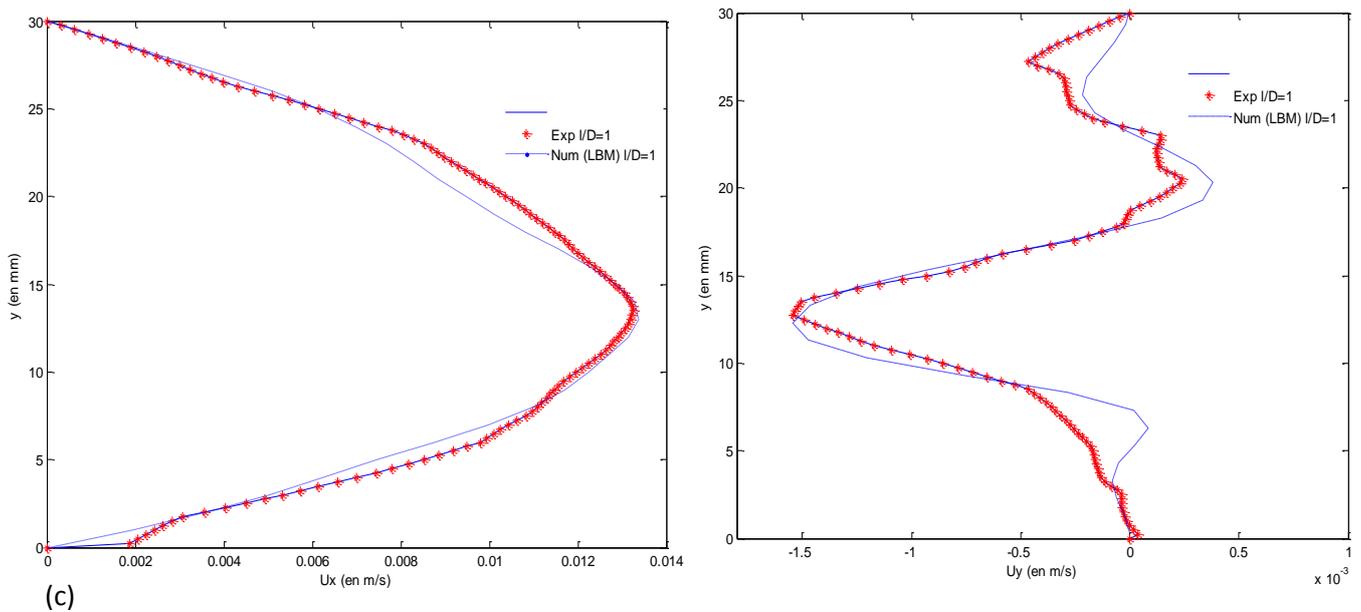
En augmentant le nombre de Reynolds, le sillage devient plus perturbé et laisse apparaître des tourbillons secondaires à partir des parois. Ces instabilités interfèrent avec celles générées par le cylindre et amplifient la perturbation du sillage.

Afin de quantifier l'écart entre les résultats expérimentaux et numériques, nous présentons quelques allures de profils de vitesses instantanés, obtenus à des positions différentes derrière l'obstacle pour un nombre de Reynolds  $Re = 80$ . L'objectif de cette partie est de pouvoir placer nos résultats LBM par rapport aux résultats expérimentaux en termes de comportement décrit par l'écoulement. Dans la figure (5.5), nous présentons l'évolution des composantes axiale et radiale de la vitesse à des différentes positions derrière l'obstacle. Pour les différents profils obtenus, les résultats issus de la simulation numérique (LBM) se conforment bien aux résultats expérimentaux.

Dans la zone en proche obstacle ( $x/D=2$ ), les profils de la composante radiale de la vitesse obtenus expérimentalement et numériquement montrent la présence de deux pics de part et d'autre de

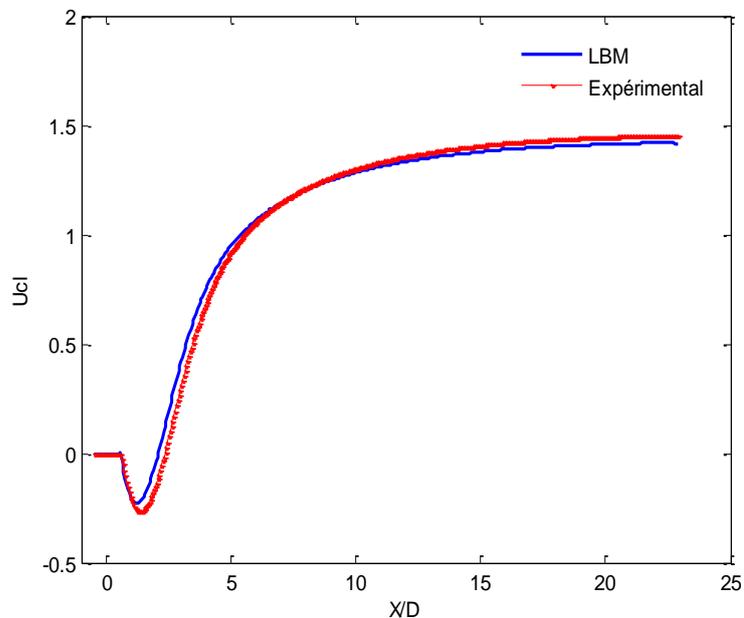
l'obstacle (Figure 5.5a) puis tendent vers une valeur nulle. Ces extremums indiquent la présence de deux zones de recirculation au niveau de cette région de l'écoulement. Par la suite, les deux pics commencent à s'atténuer progressivement en s'éloignant de l'obstacle (Figure 5.5b). Pour des distances plus de l'obstacle, le profil tend vers son allure parabolique semblable à celle d'un écoulement dans un canal en absence d'obstacle (Figure 5.5c).



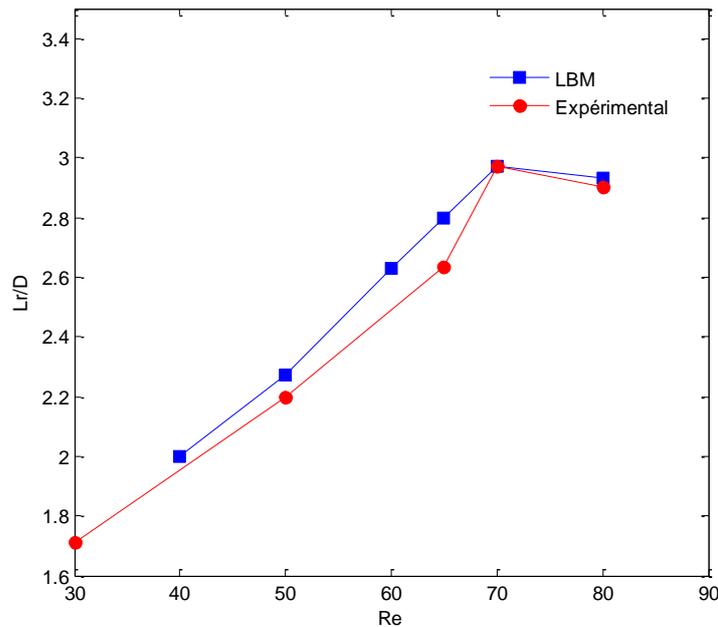


**Figure 5.5 :** Profils des composantes axiale et radiale de vitesse obtenus expérimentalement et numériquement à des distances différentes de l'obstacle : a)  $x/D = 2$  ; b)  $x/D = 5$  et c)  $x/D = 7$

L'exploitation de la composante de vitesse moyenne le long de la ligne centrale nous permet de déterminer la longueur de la zone de recirculation  $L_r$ . Cette grandeur présente un paramètre caractéristique de l'écoulement. Sur la figure (5.6), le profil de la composante de la vitesse axiale moyenne le long de la ligne centrale et pour un nombre de Reynolds  $Re=80$  est représenté. Ce profil est superposé à celui obtenu par la simulation numérique basée sur la LBM. Les résultats ainsi obtenus témoignent de la bonne performance de la méthode de LBM en termes de précision.



**Figure 5.6 :** Profils de la composante axiale moyenne de vitesse le long de la ligne centrale : Comparaison entre les résultats expérimentaux et ceux numériques issus de la LBM dans la zone proche de l'obstacle



**Figure 5.7** : Variation de la longueur de recirculation moyenne  $L_r$  en fonction du nombre de  $Re$  superposée aux résultats LBM

L'évolution de la longueur de recirculation moyenne en fonction du nombre de Reynolds est illustrée par la figure (5.7), où sont superposés les résultats expérimentaux et numériques. Nous constatons qu'il y a un bon accord entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux. L'évolution de la longueur de recirculation présente un même pic correspond à la limite supérieure du régime de recirculation et ainsi au nombre de Reynolds critique qui est de l'ordre de 72.

La section suivante est consacrée aux outils de post-traitements des données (champs instantanés de vitesses), que nous avons mis en place pour étudier la dynamique des structures tourbillonnaires dans le sillage de l'obstacle. Divers critères de détection de ces structures ont été utilisés pour détecter les structures tourbillonnaires à partir champs de vitesse obtenus par la PIV et par la LBM .

## 5.2.2 Analyse des structures tourbillonnaires

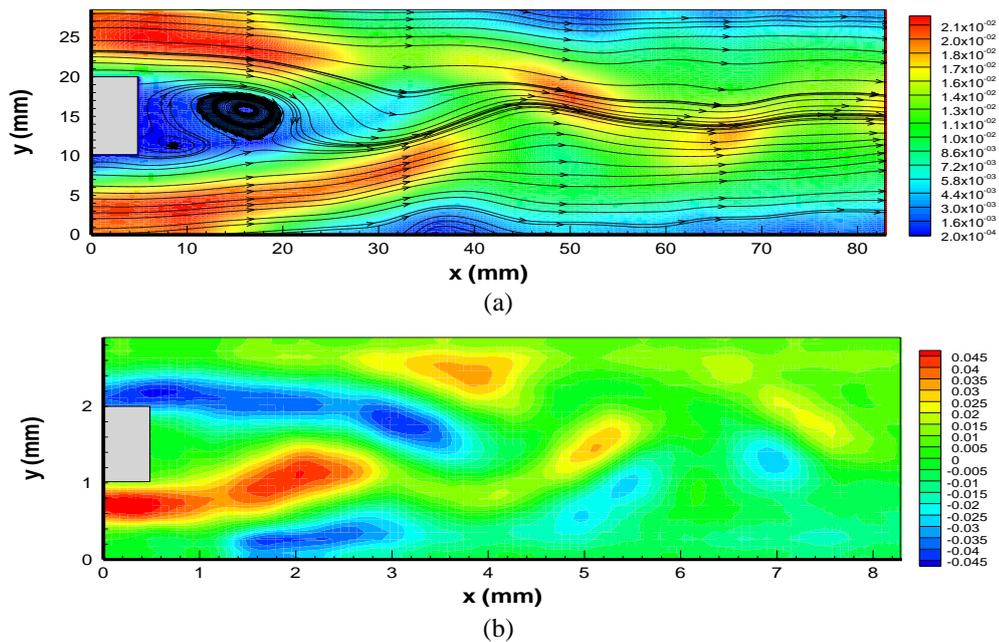
Plusieurs critères de détection de structures cohérentes sont utilisés dans la pratique et sont principalement déduits du tenseur de gradient de vitesse. L'utilisation de ces critères a pour objectif alors la caractérisation de l'ensemble des structures cohérentes existantes dans l'écoulement.

### 5.2.2.1 Critère de vorticité

Le critère vorticité, un invariant galiléen, apparaît comme le choix le plus fréquent dans l'identification des structures cohérentes d'un écoulement. Le calcul du vecteur  $\vec{\Omega}$  permet de

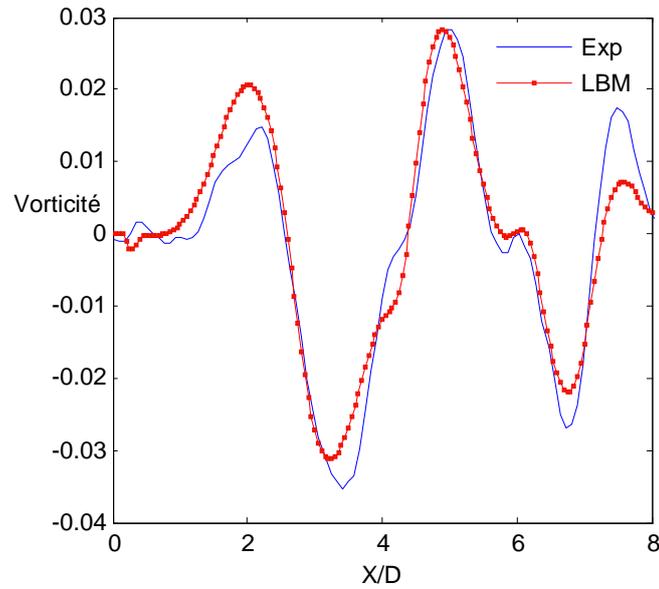
déterminer le taux de rotation dans l'écoulement. Il est défini par  $\vec{\Omega} = \nabla \wedge \vec{U}$  où l'opérateur  $\nabla \wedge$  désigne l'opérateur mathématique rotationnel. Les centres des vortex sont localisés, dans ce cas, selon Strawn et al. (1999) par la détermination du maximum local du module de vorticité.

La représentation du champ de vorticité montre l'existence de deux familles de tourbillons bien décelables (figure 5.8-b). Cependant, dans le cas d'écoulements présentant un cisaillement pariétal, l'enveloppe tourbillonnaire dans ce cas est déformée. En conséquence, l'utilisation de la vorticité devient inadaptée à la détection des structures cohérentes.



**Figure 5.8** : Iso-contours et lignes de courant expérimentaux pour Reynolds  $Re=90$  : a) Vitesse axiale ; b) Champ de vorticité

Nous avons appliqué également ce critère de vorticité à nos résultats issus de la simulation numérique par la LBM. Nous présentons sur la figure (5.9) le profil de vorticité expérimental superposé à celui obtenu numériquement sur le plan médian horizontal du canal ( $y=h/2$ ). Nous pouvons constater que les deux profils ainsi obtenus sont similaires et proches.



**Figure 5.9** : Profils de vorticité (expérience et simulation) le long de la ligne centrale du canal hydraulique pour  $Re=90$

### 5.2.2.2 Critère $Q$

Les travaux de Jeong et Hussain (1995) ont montré que l'utilisation du critère de la vorticité ne permet de distinguer entre le cisaillement et la rotation d'un tourbillon. Par conséquent, ce critère n'est pas adapté à notre configuration à cause de la présence des parois de confinement du canal.

Un autre type de critère est alors développé par Hunt et al. (1988), connu sous le nom de critère  $Q$ . Ce critère peut être interprété comme un équilibre entre la rotation et le taux de déformation sans pour autant être affecté par le cisaillement. Dans le cas d'une configuration bidimensionnelle, il est défini par:

$$Q = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial U_y}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (5.1)$$

Les structures tourbillonnaires sont alors identifiées par les iso-valeurs positives du critère  $Q$  alors que les centres des tourbillons sont localisés par les valeurs maximales du critère.

Un exemple du critère  $Q$ , appliqué aux champs de vitesses obtenus par PIV et aux champs de vitesses obtenus par la simulation numérique (LBM), est représenté sur les figures (5.10-a et -b).. La comparaison entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus par la simulation numérique montre la même localisation des centres de vortex.

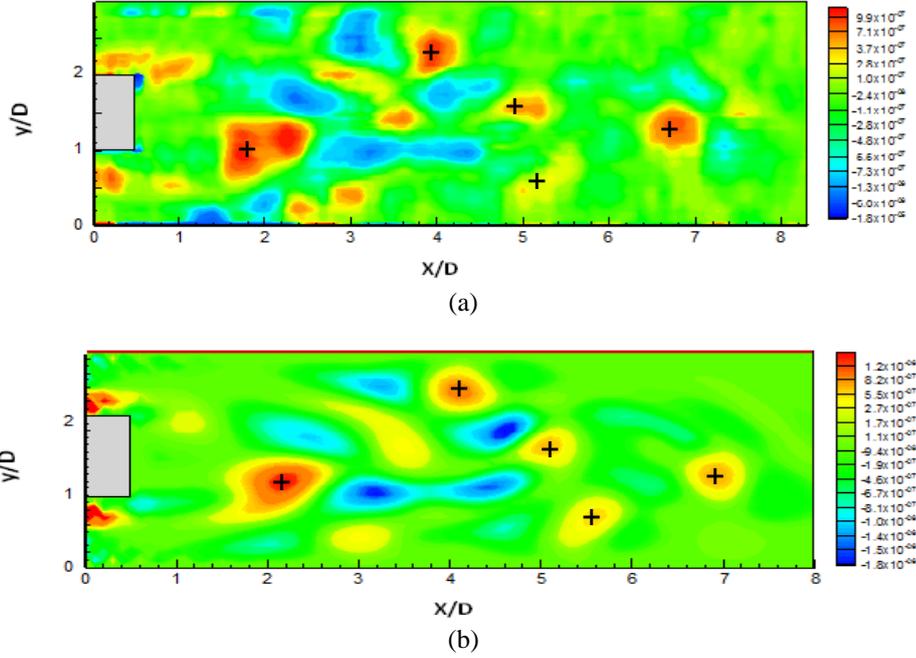


Figure 5.10 : Critère de détection  $Q$  pour  $Re=90$  : a) Champs PIV ; b) Champs LBM

### 5.2.2.3 Critère $\Gamma_2$

Outre le critère  $Q$ , Graftieaux et al. (2001) ont mis en place un nouveau critère purement cinématique, noté  $\Gamma_1$  pour l'identification des centres des tourbillons, en se basant uniquement sur la topologie de l'écoulement. Malgré que ce critère n'est pas un invariant Galiléen, il représente néanmoins une méthode simple et robuste pour l'identification des vortex. En conséquence, ce critère a été amélioré et redevenu Galiléen. Ce nouveau critère noté  $\Gamma_2$ , présente l'avantage de tenir compte de la convection locale du tourbillon, les extremas correspondent aux centres de vortex.

La formulation mathématique du critère  $\Gamma_2$  s'écrit :

$$\Gamma_2 = \frac{1}{S} \int_{M \in S} \frac{(PM \wedge (U(M) - \tilde{U}(P))) \cdot e_z}{\|PM\| \cdot \|U(M) - \tilde{U}(P)\|} dS \quad (5.2)$$

avec  $\tilde{U}(P) = \frac{1}{S} \int_{M' \in S} U(M') dS$

$e_z$  est un vecteur unitaire perpendiculaire au vecteur vitesse,

$P$  est un point du domaine où le critère est calculé et  $S$  est la surface autour du point  $P$ . Dans notre cas, nous avons pris  $S = \delta \Delta x \Delta y$ .

Le critère  $\Gamma_2$  appliqué aux champs de vitesses issus des mesures par PIV et ceux obtenus numériquement grâce à LBM, est présenté sur les figures (5.11-a et -b). Ce critère montre la présence de deux familles de vortex. Une première famille ( $P_1, P_2$ ), principalement composée de

deux tourbillons contrarotatifs, analogues à ceux de Von Kármán, qui se détachent alternativement dans le sillage de l'obstacle.

L'effet du confinement créé par les parois inférieure et supérieure du canal est, dans ce cas, bien mis en évidence. La trajectoire des tourbillons (primaires générés par l'obstacle) est significativement modifiée par les instabilités provenant des parois.

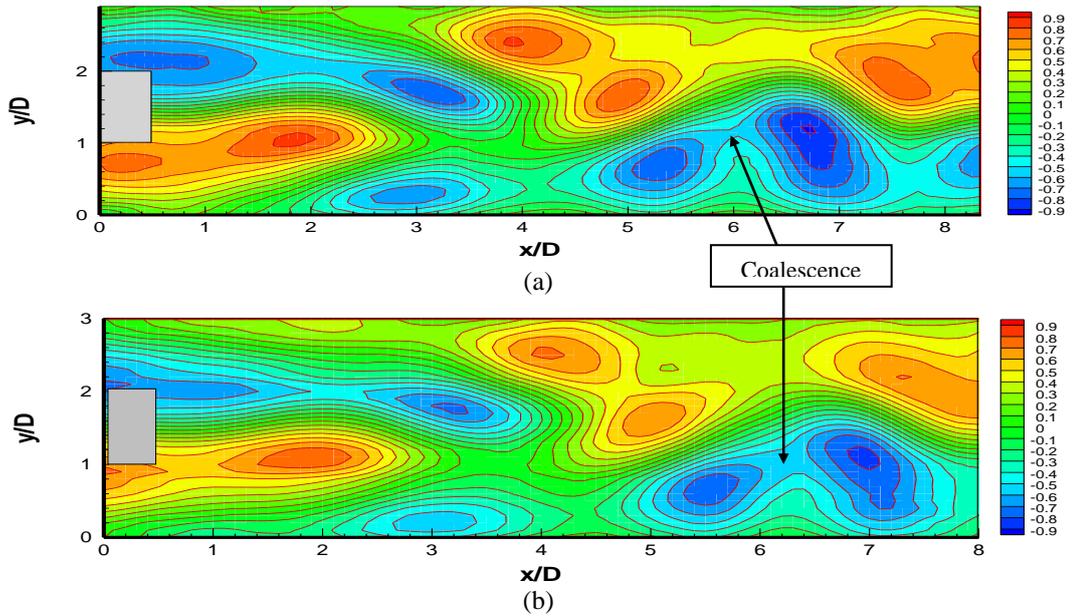
Nous considérons l'exemple d'un tourbillon primaire noté ( $P_1$ ), convecté dans le sillage vers la direction de la paroi supérieure. Le passage du tourbillon de la zone proche paroi crée un changement des propriétés spatiales et dynamiques des particules de fluide au niveau de cette zone. En conséquence, un tourbillon noté ( $P_1'$ ), de sens opposé, est créé et éjecté en forçant le tourbillon ( $P_1$ ) à traverser le canal suivant l'axe des  $y$  pour se trouver en contact avec la paroi inférieure.

Le même phénomène se produit d'une façon analogue, pour les tourbillons primaires ( $P_2$ ) convectés vers la paroi inférieure, créant les structures ( $P_2'$ ) éjectées vers le niveau le plus élevé du canal.

Par ailleurs, pendant sa nouvelle trajectoire modifiée vers la paroi inférieure, le tourbillon ( $P_1$ ) ne parvient pas à l'atteindre directement. Ce tourbillon se trouve, en effet, confronté au vortex ( $P_2$ ) présent dans le sillage ; ce qui engendre un phénomène de coalescence entre les tourbillons (localisés à  $x=6D$  dans notre cas). Ceci a été constaté dans les travaux expérimentaux de Rehimy (2006) où il a localisé la coalescence à  $x=5D$  dans le cas d'un obstacle circulaire.

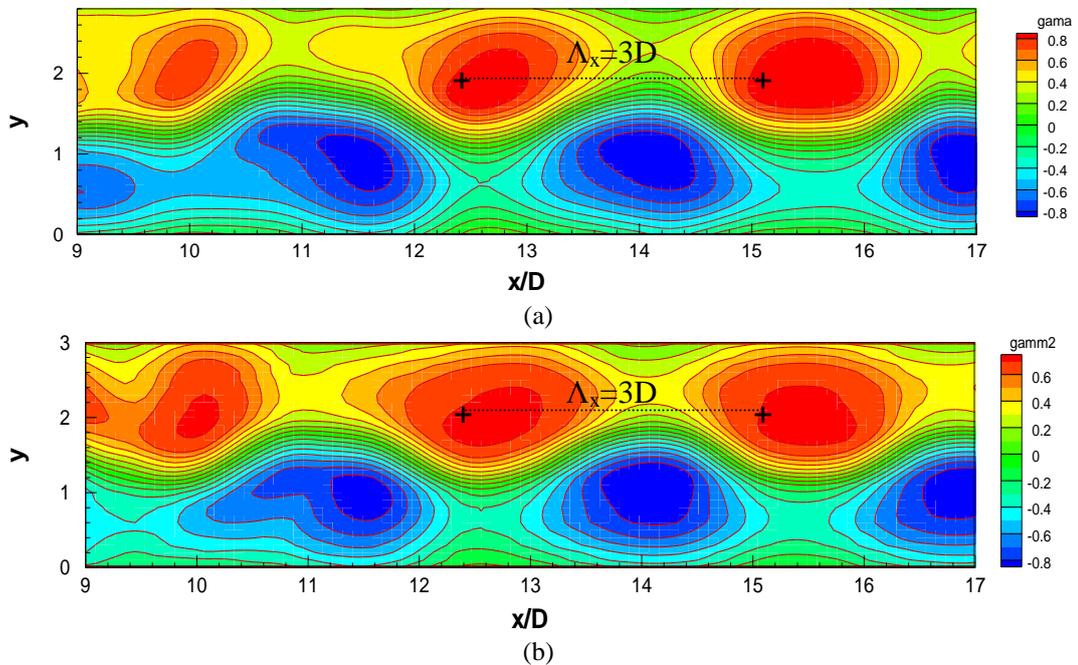
Ces phénomènes ne se manifestent pas dans le cas d'un obstacle placé dans un milieu infini ou dans un canal présentant un rapport de confinement très faible. D'après les travaux de Pedrizzetti et Zovatto (2001), et Guerrouache (2000) le phénomène de changement de trajectoire tourbillonnaire apparaît à partir d'un confinement  $r \leq 1,8$ .

L'application du critère  $\Gamma_2$  à des champs de vitesse obtenus par PIV et numériquement dans une zone plus éloignée de l'obstacle pour  $Re=90$  est présentée sur la figure Fig. (5.12-a et -b). Loin de l'obstacle, les tourbillons tendent à se réorganiser de façon définitive en deux rangées alternées. Les phénomènes de coalescence et de changement de trajectoire disparaissent et les tourbillons sont convectés vers la sortie du canal en roulant sur les deux parois.



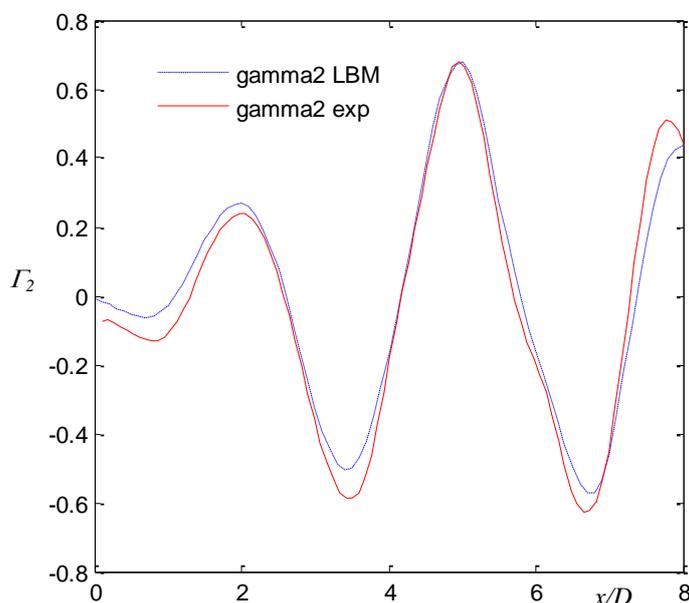
**Figure 5.11** : Critère de détection  $\Gamma_2$  pour  $Re=90$  et phénomène de coalescence dans la zone proche de l'obstacle : a) Champs PIV ; b) Champs LBM;

Les résultats numériques sont en accord avec les résultats expérimentaux et présentent une distance entre deux tourbillons consécutifs de même signe de l'ordre de  $\Lambda_x=3D$ , où  $D$  est le diamètre hydraulique de l'obstacle.



**Figure 5.12** : Critère de détection  $\Gamma_2$   $Re=90$  dans la zone éloignée de l'obstacle : a) Champs PIV ; b) Champs LBM

La figure 5.13 présente une comparaison plus détaillée entre les résultats numériques et expérimentaux. Le profil du critère  $\Gamma_2$  numérique est en bon accord avec celui obtenu à partir d'un champ snapshot de PIV.



**Figure 5.13** : Profils du critère  $\Gamma_2$  le long de la ligne centrale horizontale du canal hydraulique pour  $Re=90$ , appliqué à un champ expérimental obtenu par PIV et champ numérique obtenu par la LBM

## 5.2.3 Décomposition POD de l'écoulement

### 5.2.3.1 Principe de la décomposition orthogonale en modes propres

Les champs de vitesse issus des mesures par PIV contiennent généralement des bruits. Par conséquent, l'application des critères basés sur le calcul des dérivées partielles des composantes du vecteur vitesse amplifie de manière importante ces bruits.

La décomposition POD (Proper Orthogonal Decomposition) de l'écoulement se présente alors comme un filtre efficace, permettant de filtrer ce bruit. Ceci se fait alors par troncature de la base POD aux premiers modes les plus énergétiques. Par ailleurs, la décomposition POD peut aussi être utilisée comme outil fiable pour l'étude des structures tourbillonnaires cohérentes et leurs contributions énergétiques dans l'écoulement.

Dans le cas de notre étude, la décomposition POD de l'écoulement est effectuée sur un nombre  $N=300$  champs instantanés de vitesses avec une fréquence d'échantillonnage  $f_e=15Hz$ . En notant par  $S_I$  la séquence des mesures obtenues par PIV, tel que :

$$S_1 = \{\vec{U}(x, y, t_1), \vec{U}(x, y, t_2), \dots, \vec{U}(x, y, t_N)\}$$

et par  $\Omega$  le domaine de mesure tel que :  $\Omega = N_x \times N_y$

le produit scalaire Euclidien de ces mesures s'écrit donc sous la forme :

$$\left(\vec{U}(x, y, t_i), \vec{U}(x, y, t_j)\right) = \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} \left( U_x(x_k, y_l, t_i) U_x(x_k, y_l, t_j) + U_y(x_k, y_l, t_i) U_y(x_k, y_l, t_j) \right) \Delta x_k \Delta y_l \quad (5.3)$$

La matrice de corrélation temporelle s'écrit dans ce cas :

$$C(i, j) = \left( \vec{U}(x, y, t_i) - \vec{U}_{moy}, \vec{U}(x, y, t_j) - \vec{U}_{moy} \right) \quad (5.4)$$

Les valeurs propres de cette matrice de corrélation, notées  $\lambda_i$  vérifient la relation :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N > 0 \quad (5.5)$$

En notant par  $V^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) les vecteurs associés aux valeurs propres, chaque mode POD s'écrit alors ainsi :

$$\vec{\phi}^{(n)}(x, y) = \sum_{j=1}^N \frac{\vec{V}_j^{(n)}}{\sqrt{N \lambda_n}} \vec{U}(x, y, t_j) \quad (5.6)$$

Les champs de vitesse instantanés peuvent s'écrire alors en fonction des modes POD sous la forme :

$$\vec{U}(x, y, t_j) = \vec{U}_{moy}(x, y) + \sum_{n=1}^N a_n(t_j) \vec{\phi}^{(n)}(x, y) \quad (5.7)$$

où  $a_n$  est le coefficient temporel associé au mode  $\vec{\phi}^{(n)}$ .

La vorticité peut s'écrire dans ce cas sous la forme :

$$\vec{\omega}(x, y, t_j) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{U}(x, y, t_j) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{U}_{moy} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n(t_j) \vec{\nabla} \wedge \vec{\phi}^{(n)}(x, y) \quad (5.8)$$

L'utilisation de la POD comme filtre, s'effectue alors par troncature de la base POD à un ordre  $M$  permettant de récupérer un maximum d'énergie de l'écoulement.

Nous avons utilisé pour la décomposition POD de nos mesures expérimentales une valeur de  $M=4$  permettant ainsi de récupérer plus de 90% de l'énergie fluctuante ; soit un rapport de  $(\sum_{i=1}^4 \lambda_i / \sum_{i=1}^N \lambda_i) \geq 90\%$  (cf. figure 5.15).

Nous appliquons alors, la POD aux mesures expérimentales des champs de vitesses instantanés dans deux zones différentes de l'écoulement pour un nombre de Reynolds  $Re=90$ .

La représentation des quatre premiers modes spatiaux les plus énergétiques montre que ces derniers sont conjugués deux à deux présentant alors une périodicité. Ces modes sont directement liés aux structures de von Kármán. Nous rappelons au passage que le mode 0 correspond à l'écoulement moyen, et que tous les autres modes qui suivent représentent l'écoulement fluctuant.

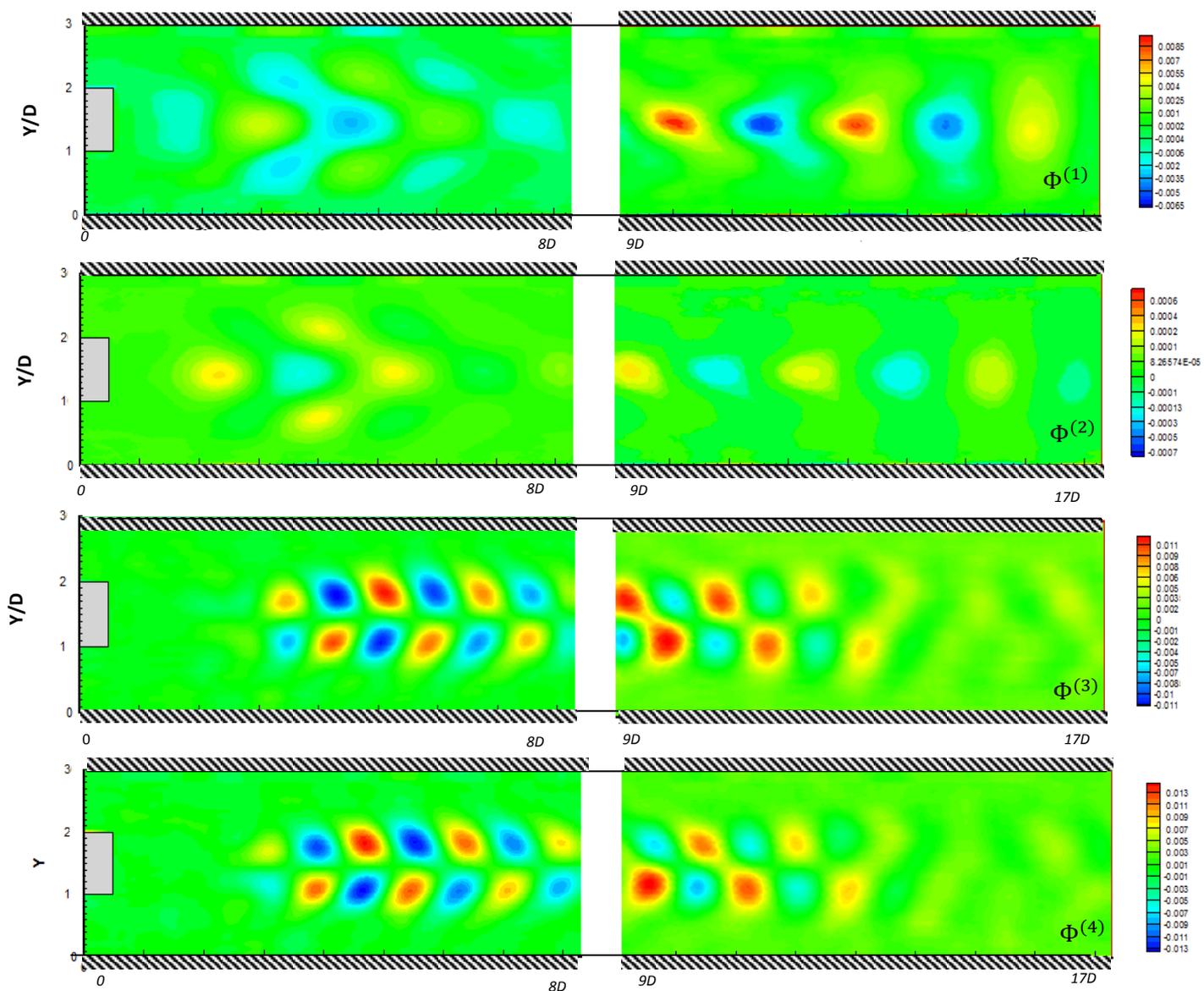
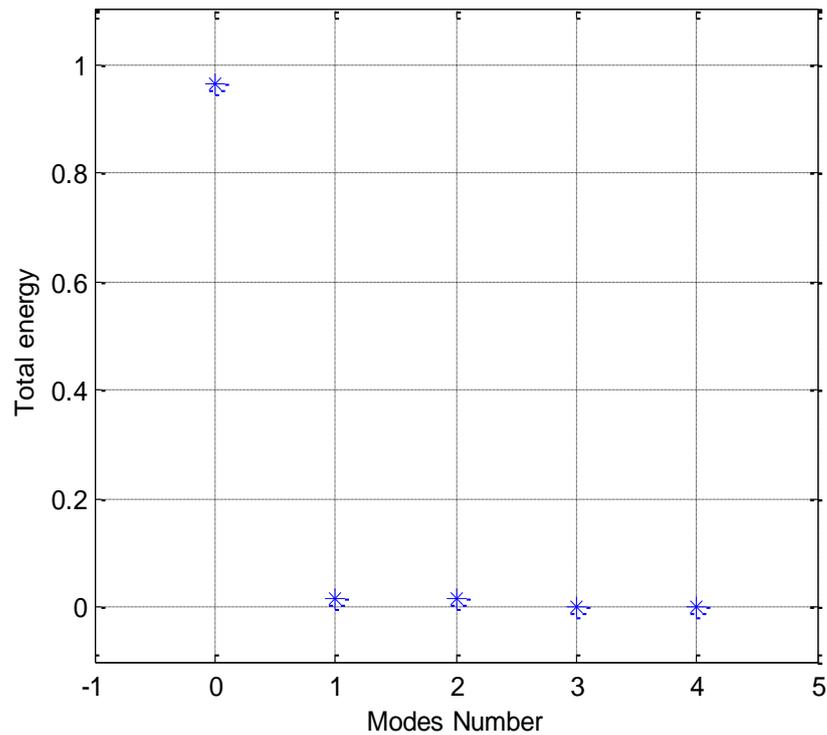


Figure 5.14 : Les premiers quatre modes obtenus dans le sillage de l'obstacle pour  $Re=90$



**Figure 5.15** : Distribution de l'énergie pour les différents modes

Le principal intérêt de l'utilisation de la POD est de déterminer la contribution énergétique des structures tourbillonnaires cohérentes présentes dans le sillage. En effet, la POD va jouer alors le rôle d'un filtre inhomogène qui paraît dans notre cas d'étude très utile. Le filtrage des champs de vitesses instantanés mesurés via leurs réécritures avec une troncature aux premiers modes les plus énergétiques, permet d'éliminer les bruits de hautes fréquences et à très faibles énergies. Ceci est bien utile lors qu'on comparera par la suite les résultats du gradient pariétal de vitesse à celui mesuré par la méthode électrochimique au-dessus immédiat de chaque microélectrode.

La section suivante est consacrée à l'étude expérimentale de l'apparition des instabilités dans un écoulement de Couette-Taylor avec et sans débit axial.

### 5.3 Étude expérimentale d'un écoulement de Couette Taylor

Le deuxième volet de notre étude expérimentale porte sur l'exploitation du dispositif de Couette-Taylor. Le principal objectif de ces travaux expérimentaux est de caractériser les instabilités de Couette-Taylor en vue d'étudier les interactions entre tourbillons et paroi. Nous présentons ainsi les résultats des mesures expérimentales dans l'écoulement au niveau de l'entrefer des deux cylindres coaxiaux pour des régimes allant du laminaire jusqu'au régime turbulent. Différents types de mouvements imposés au cylindre interne mobile sont proposés : cylindre oscillant, perturbation brusque ou progressive, rampe, etc. Un écoulement axial est aussi superposé à

l'écoulement principal de Couette-Taylor ; ce qui est connu sous le nom de l'écoulement de Couette-Taylor.

Dans une première partie, nous présentons une étude qualitative de l'écoulement permettant d'obtenir la topologie de l'écoulement. Nous décrivons ainsi les différents régimes d'écoulement conditionnés par le nombre de Taylor (2.21). L'effet de la superposition d'un écoulement axial sera par la suite explicité. Une seconde partie est consacrée à l'exploitation des mesures issues de la PIV dans la zone de mesure au niveau de l'entrefer du système de Couette-Taylor (SCT).

Une troisième partie de ce chapitre sera dédiée aux résultats des mesures synchronisées entre la technique de PIV et la méthode électrochimique pour la détermination du gradient pariétal de vitesse, symbolisant l'interaction entre les tourbillons et la paroi.

### **5.3.1 Étude qualitative: Visualisation de l'écoulement**

Afin d'entamer une description qualitative du comportement de l'écoulement produit par le mouvement du cylindre interne, nous avons réalisé des visualisations sur la hauteur de l'entrefer du système de Couette-Taylor. A cet effet, nous avons utilisé des particules de kalliroscope à une proportion d'environ 1% pour l'ensemencement de l'écoulement.

L'illumination du plan de visualisation est réalisée grâce à une nappe laser dirigée vers l'entrefer du dispositif de Couette-Taylor, permettant ainsi d'obtenir une coupe dans le plan  $(r,z)$  de l'écoulement.

Les captures des images sont assurées par une caméra monochromatique, positionnée face aux cylindres à une distance d'environ  $1,50\text{ m}$  et reliée à une station de travail. Ce système permet le stockage des images et la reconstitution de la séquence vidéo de l'écoulement. Cette technique de visualisation permet d'étudier qualitativement l'évolution spatio-temporelle des instabilités et mettre ainsi en évidence le caractère ondulatoire des cellules de Couette-Taylor.

Les visualisations réalisées portent sur trois configurations d'écoulement différentes. La première est un écoulement de Couette-Taylor simple. Pour les deux autres configurations, on ajoute à l'écoulement de Couette-Taylor un écoulement de Poiseuille axial. Pour la seconde configuration, on impose la vitesse de rotation au cylindre intérieur avant d'imposer un débit axial. Il s'agit alors du protocole dit "direct". La dernière configuration est dit "protocole inverse". On impose alors un débit axial avant de mettre en rotation le cylindre interne du dispositif.

Les différents régimes d'écoulement sont délimités par le nombre de Taylor. La vitesse de rotation du cylindre interne est donnée par une courbe d'étalonnage du moteur (figure 2.2). Les paramètres géométriques du dispositif de Couette-Taylor sont donnés précédemment au niveau du chapitre présentant les dispositifs expérimentaux.

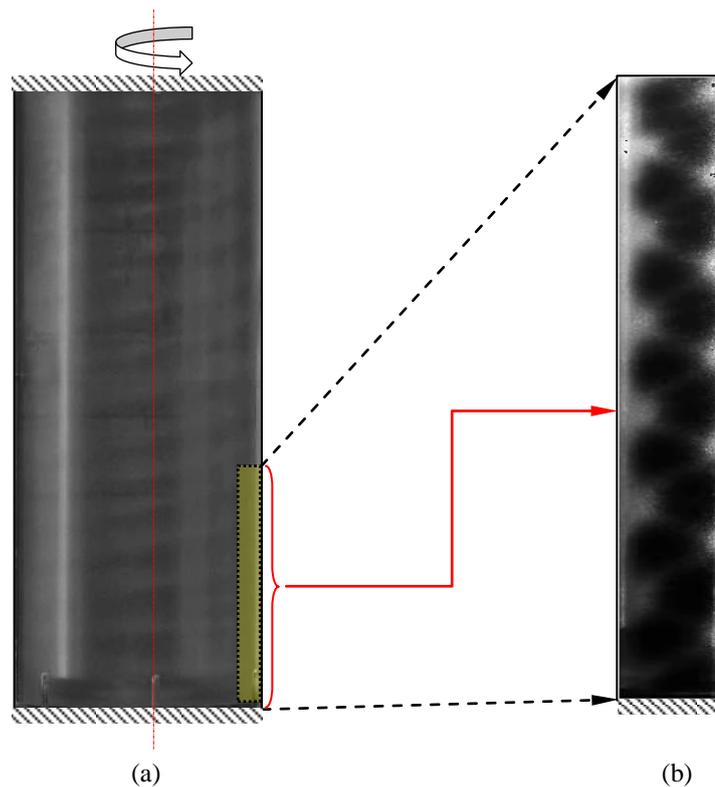
### 5.3.3.1 Régime d'écoulement de Couette-Taylor

Dans une première partie de cette section, nous procédons à la visualisation directe de l'écoulement de Couette-Taylor de base en l'absence d'un écoulement axial. Ces visualisations ont été effectuées après avoir vérifié l'homogénéité spatiale de la lumière réfléchie et l'absence de tous résidus de particules au niveau des parois. En variant la vitesse de rotation du cylindre interne mobile, donc le nombre de Taylor, l'écoulement dans l'espace annulaire commence à présenter des instabilités permettant de délimiter les différents régimes de Couette-Taylor en fonction du nombre de Taylor.

#### a- Régime des vortex de Taylor (Taylor Vortex Flow: TVF)

La mise en rotation du cylindre intérieur du dispositif de Couette-Taylor (cylindre externe fixe), crée un écoulement au niveau de l'espace annulaire entre ces deux cylindres coaxiaux qui forment la veine d'essai. En augmentant progressivement cette vitesse de rotation du cylindre mobile, des premières structures tourbillonnaires commencent à apparaître à partir des extrémités de celui-ci allant tout au long de l'entrefer des deux cylindres. La vitesse de rotation du cylindre déclenchant la génération des premières instabilités correspond dans notre cas à un nombre de Taylor  $Ta \approx 45,5$ . Ce nombre de Taylor, dit "critique", est quasiment le même que celui obtenu par Berrich (2011) expérimentalement sur le même dispositif, conforme à celui obtenu et vérifié empiriquement par la relation de Sobolik et al. (2.25),  $Ta_{emp.} = 45,47$ , pour un rapport radial  $\eta = 0,855$ .

La visualisation de l'écoulement par des particules de kalliroscope ensemençant le fluide et éclairées grâce à un laser met bien en évidence le mouvement périodique formant des structures tourbillonnaires sous forme de vortex toroïdaux (rouleaux de Taylor). Une visualisation du plan laser perpendiculaire au plan de l'écoulement dans l'entrefer du dispositif de Couette-Taylor permet de distinguer nettement les cellules de Taylor et de déterminer ainsi leur nombre sur toute la hauteur de la veine d'essai.



**Figure 5.16** : Régime de vortex de Taylor  $Ta \approx 47$ ,  $Ta^* = 1,03$  : a) Visualisation globale des vortex de Taylor ; b) Coupe laser plan des vortex de Taylor

Cette visualisation nous a permis, de déterminer la longueur d'onde axiale des instabilités périodiques, qui est d'environ  $\lambda \approx 33 \text{ mm}$  ; soit  $\lambda \approx 2,27.e$  où  $e$  est l'épaisseur de l'entrefer ( $e = 14,5 \text{ mm}$ ). La figure (5.16) donne la visualisation générale du régime *TVF* (figure (5.16-a)) ainsi qu'une vue en coupe des cellules de Taylor au moyen d'une coupe normale par un plan laser de l'écoulement dans l'entrefer. Par ailleurs, on peut remarquer que les rouleaux de Taylor sont légèrement inclinés. Ceci est dû probablement aux conditions opératoires (vibrations du système et/ou température ambiante différente de la température du fluide entre les deux cylindres engendrant un mouvement de convection naturelle).

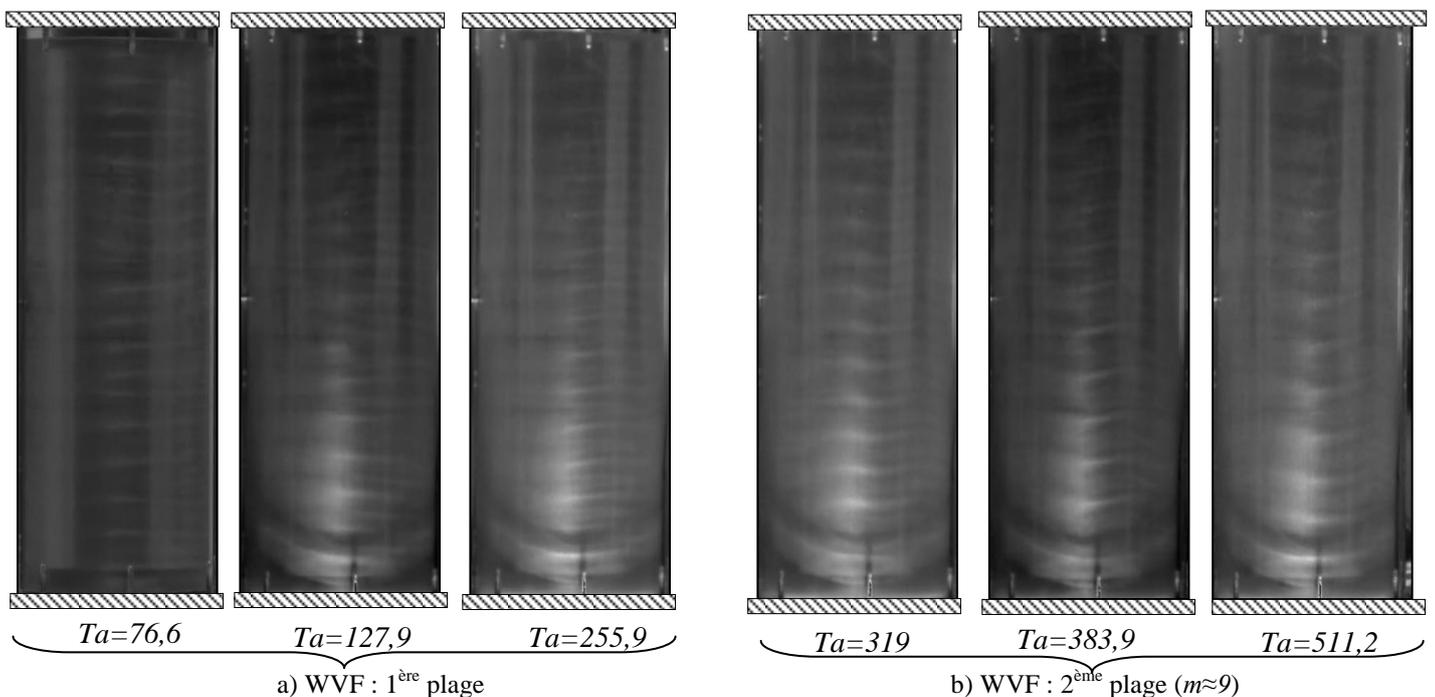
#### **b- Régime des vortex de Taylor ondulés (Wavy Vortex Flow: WVF)**

En augmentant la vitesse de rotation du cylindre, un deuxième régime d'instabilité prend naissance. Cette deuxième instabilité est caractérisée par l'apparition d'une onde azimutale superposée aux premiers rouleaux de vortex de Taylor générant ainsi leur oscillation. Ainsi, les rouleaux prennent une forme ondulatoire périodique autour du cylindre dans la direction azimutale et axiale, brisant alors l'axisymétrie des rouleaux. Ces ondulations sont nettement visibles grâce aux réflexions lumineuses des particules de Kalliroscope (figure 5.17). Dans ce cas, les rouleaux de Taylor sont caractérisés par deux périodicités différentes, définies par une longueur d'onde  $\lambda$  dans la direction axiale et un nombre d'onde  $m$  dans la direction azimutale. Ce nombre est

déterminé grâce à des enregistrements vidéo du temps que met un train d'onde pour parcourir un tour complet (Bouabdallah, 1980 et Berrich, 2011).

Dans ce même dispositif expérimental, l'apparition de la deuxième instabilité débute à partir d'un nombre de Taylor  $Ta \approx 65$ . A ce stade, le nombre d'onde azimutale  $m$  obtenu est environ égal à 3 alors que la longueur d'onde axiale  $\lambda$  reste similaire à celle du régime TVF ( $\lambda = 2,27.e$ ). En augmentant progressivement la vitesse de rotation du cylindre intérieur, la valeur du nombre d'onde azimutale  $m$  croît progressivement avant d'atteindre un palier à  $m \approx 9$ . Ceci est conforme aux mesures expérimentales de Berrich (2011). A cet effet, le régime WVF peut être partagé en deux plages selon le nombre de Taylor : Une première plage qui correspond à un nombre d'onde  $m$  croissant en fonction du nombre de Taylor. En effet, la longueur d'onde axiale augmente légèrement passant ainsi de  $\lambda = 2,27.e$  à  $\lambda = 2,62.e$ . Ce sous-régime prend alors fin vers un nombre de Taylor aux alentours de  $Ta = 300$ . Par la suite, une seconde plage, caractérisée par un nombre d'onde  $m$  constant ( $m = 9$ ), se prolonge jusqu'à  $Ta \approx 600$ . La longueur d'onde axiale garde également une valeur constante ( $\lambda \approx 2,65.e$ ).

Les figures 4.18 illustrent les visualisations obtenues du comportement global des particules de kalliroscope dans le dispositif de Couette-Taylor, pour divers nombres de Taylor dans le régime WVF. L'aspect ondulatoire des tores de Taylor est nettement observé pour les série des nombres de Taylor étudiés :  $Ta = 76,6$  ;  $Ta = 127,9$  et  $Ta = 255,9$  correspondant alors à la première plage du régime de rouleaux ondulés et  $Ta = 319$ ,  $Ta = 383,9$  puis  $Ta = 511,2$  correspondant à la seconde plage du régime WVF.

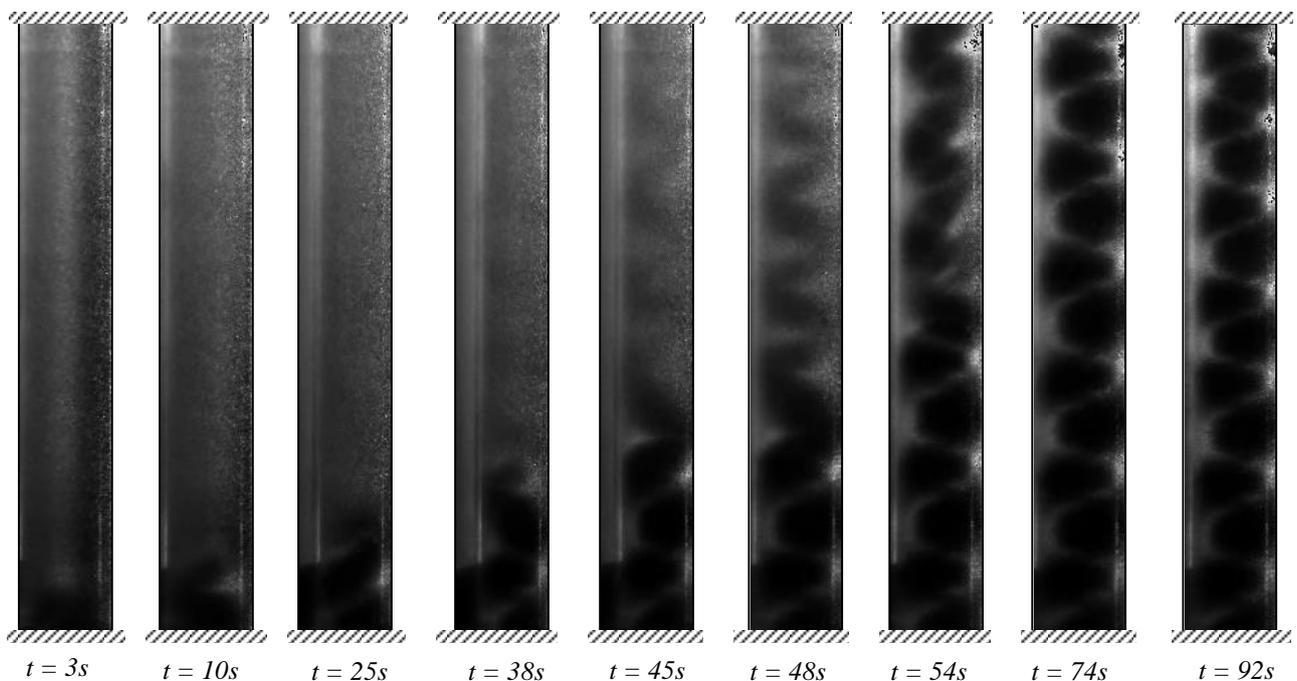


**Figure 5.17** : Visualisation globale des rouleaux de Taylor en régime de vortex ondulés WVF :  
a)  $Ta < 300$  ou  $Ta^* < 6,6$  ; b)  $300 < Ta < 600$  ou  $6,6 < Ta^* < 13,2$

Les séquences vidéo ainsi enregistrées permettent de déterminer le comportement de l'écoulement dans la veine d'essai et aussi la longueur d'onde azimutale. L'augmentation du nombre de Taylor, entraîne, dans un premier lieu, l'ondulation des rouleaux de Taylor sans pour autant agir significativement sur leur nombre. Par la suite, au-delà d'un nombre de Taylor  $Ta=300$ , l'accélération de la rotation du cylindre interne n'a plus d'effet sur les ondulations, mais permet d'augmenter la vitesse de déplacement des particules dans les rouleaux.

L'évolution temporelle des instabilités dans le plan  $(r,z)$  du dispositif de Couette-Taylor est représentée sur la figure (5.18) pour trois nombres de Taylor dans le régime WVF :  $Ta=76,6$ ,  $Ta=127,9$  et  $Ta=383,9$ . La vitesse du moteur est maintenue constante dès le déclenchement.

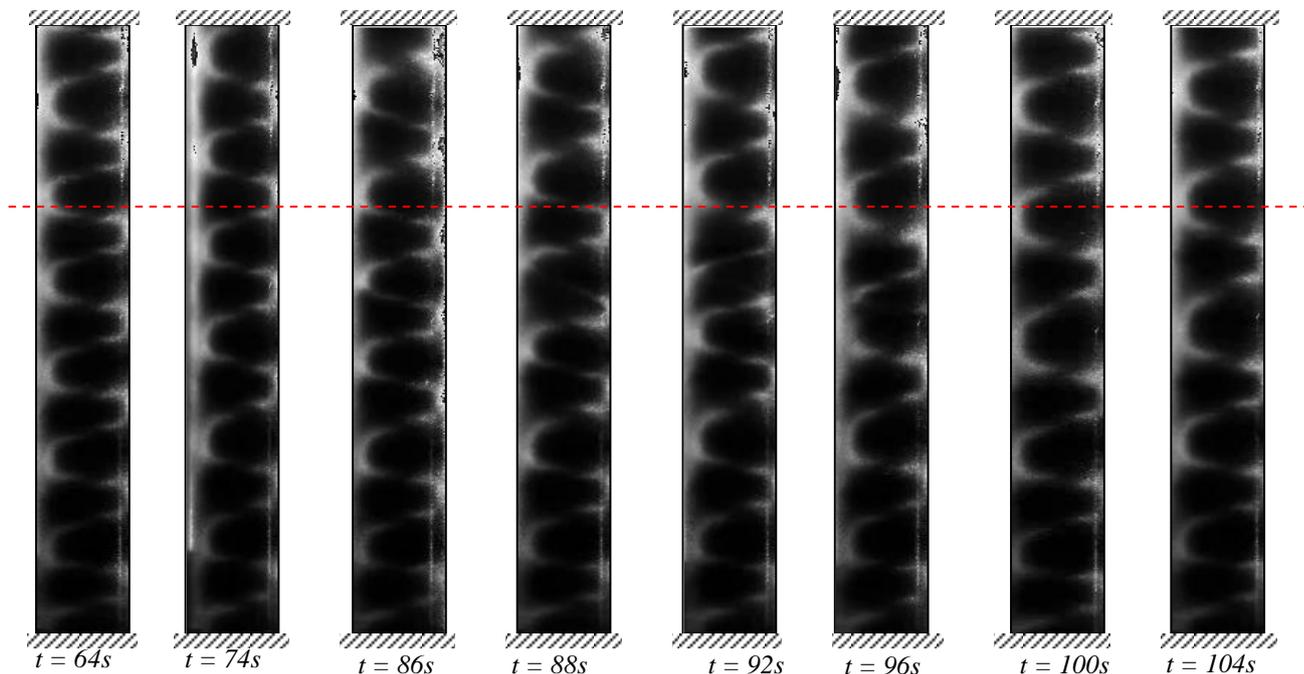
L'observation de ces figures montre bien le comportement des rouleaux de Taylor dès leurs naissance à leurs propagation au long de l'espace annulaire. Le mécanisme de formation de ces instabilités et leurs comportements au cours du temps est nettement explicité.



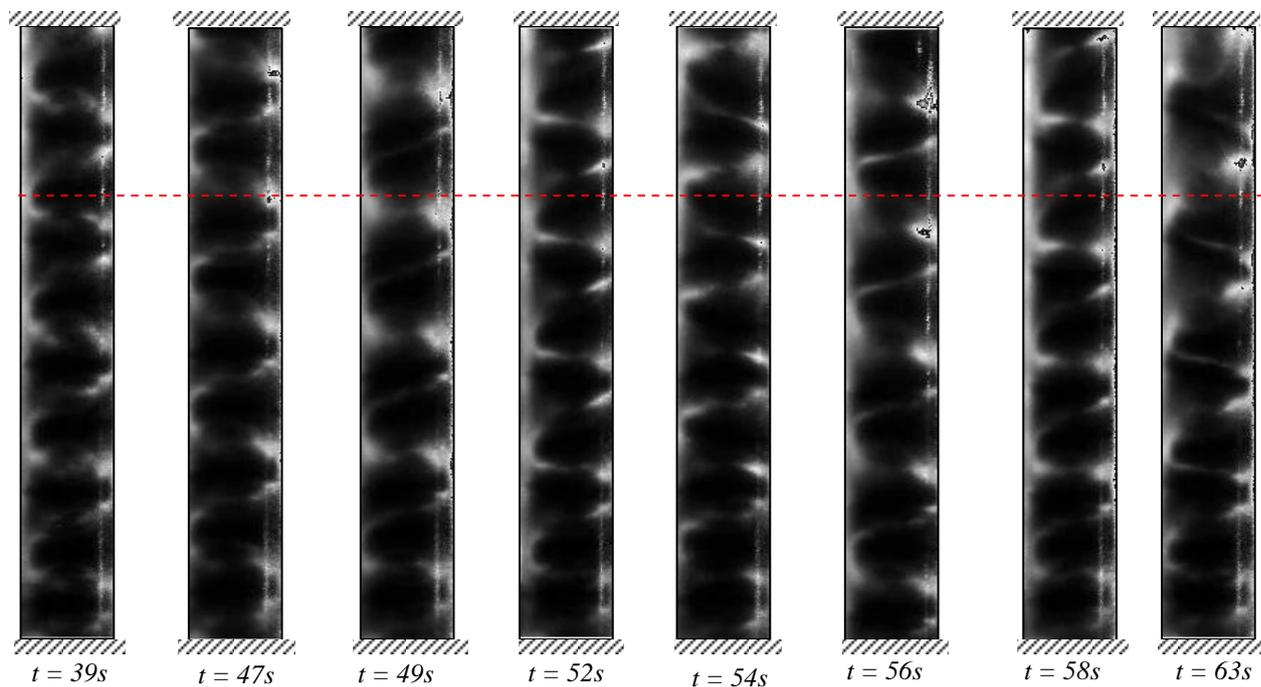
**Figure 5.18 :** Évolution temporelle des vortex de Taylor dans le plan  $(r, z)$  en régime WVF  $Ta=76,6$

La figure (5.19) illustre l'évolution temporelle des instabilités de Taylor dans le plan  $(r,z)$ . Ces dernières sont représentées pour un nombre de Taylor  $Ta=127,9$  qui correspond à la première plage du régime des vortex de Taylor ondulés (WVF). Les images sont prises à des instants différents à partir d'un temps  $t_0$  correspondant à l'accomplissement de la formation des vortex de Taylor et le début de leur oscillation. L'évolution spatio-temporelle des vortex de Taylor est alors bien visible. La figure (5.20) présente les photographies instantanées toujours du plan  $(r,z)$  dans l'espace annulaire pour un nombre de Taylor  $Ta=383,9$ , correspondant à la deuxième plage du régime WVF. Ce régime est caractérisé par un nombre d'onde  $m$  invariant ce qui s'explique par

une période constante de l'onde azimutale des rouleaux. Les limites du régime WVF sont conditionnées par les paramètres géométriques du dispositif de Couette-Taylor, et principalement par le rapport d'aspect  $\Gamma$  (Czarny, 2013).



**Figure 5.19** : Évolution temporelle des vortex de Taylor dans le plan  $(r, z)$  en régime WVF  $Ta=127,9$



**Figure 5.20** Évolution temporelle des rouleaux de Taylor dans le plan  $(r,z)$  en régime WVF :  $Ta=383,9$

### **c- Régime des vortex de Taylor ondulés modulés (Modulated Wavy Vortex Flow: MWVF)**

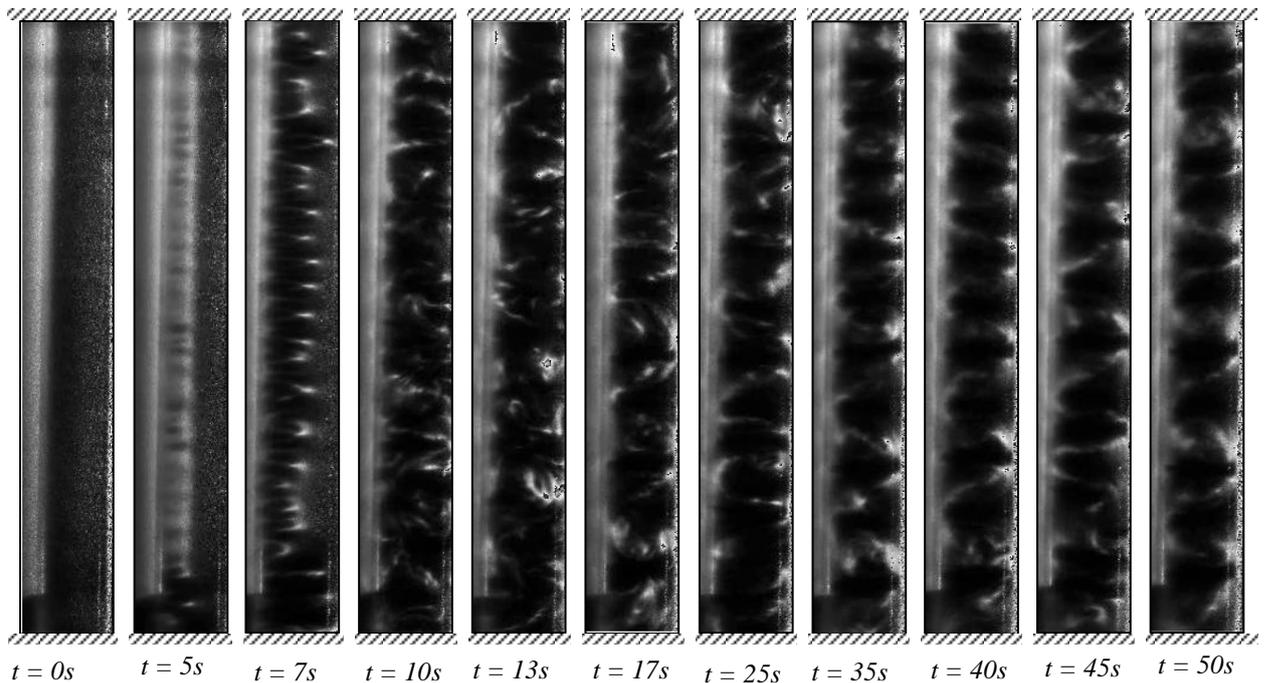
Ce régime est atteint en augmentant la vitesse de rotation du cylindre mobile à partir d'un nombre de Taylor aux alentours de  $Ta=600$ . Ce seuil correspond en effet à l'apparition des perturbations de l'écoulement au niveau des rouleaux. L'amplitude de l'onde azimutale varie et les cellules commencent à se déstructurer. La principale caractéristique du comportement des structures de l'écoulement est alors un mouvement d'ensemble des tourbillons de Taylor sans pour autant perturber les phases entre ces derniers.

L'observation du comportement global de l'écoulement à l'aide des visualisations permet de bien déceler les rouleaux de Taylor (figure 5.21). La visualisation de cet écoulement dans le plan  $(r,z)$  permet d'observer l'aspect déstructuré et instable de l'écoulement à l'intérieur des rouleaux de Taylor. La présentation spatio-temporelle du plan  $(r,z)$  montre une migration des particules vers le centre du vortex (Figure 5.22). Le dénombrement des ondes azimutales et axiales de l'écoulement permet de distinguer deux régimes correspondant à deux gammes du nombre de Taylor. Une première gamme, allant jusqu'à  $Ta\approx 920$ , et qui est caractérisée par une diminution rapide du nombre d'onde  $m$  (de 9 à 4) ; ce qui entraîne une atténuation de la courbure des rouleaux dans la direction azimutale. La deuxième gamme correspondant à des nombres de Taylor au-dessus de  $Ta=920$  se caractérise par un nombre d'onde  $m$  invariant et une forte perturbation à l'intérieur des rouleaux.

Les visualisations dans le plan  $(r,z)$  à des différents instants de l'écoulement pour un nombre de Taylor  $Ta=767$  sont montrées sur la figure (5.22). Ces observations indiquent que l'écoulement passe par trois phases différentes. Des instabilités de Taylor, sous leurs formes toriques, commencent à se former rapidement dès les premières rotations du cylindre interne. Par la suite, l'écoulement passe par une phase complètement chaotique où les vortex de Taylor deviennent totalement déstructurés et brisés, et finit par reprendre sa forme caractéristique. Les vortex de Taylor réapparaissent et commencent à osciller, alors que les particules de kalliroscopie tendent à migrer vers le centre des rouleaux.



**Figure 5.21** : Visualisation globale des vortex de Taylor en régime de vortex de Taylor ondulé modulé MWVF ; a)  $Ta^*=11,23$  ; b)  $Ta^*=14,06$  ; b)  $Ta^*=21,06$



**Figure 5.22** : Évolution temporelle des vortex de Taylor dans le plan  $(r,z)$  en régime MWVF  $Ta=767$

#### **d- Régime turbulent des Vortex de Taylor (Turbulent Taylor Vortex: TTV)**

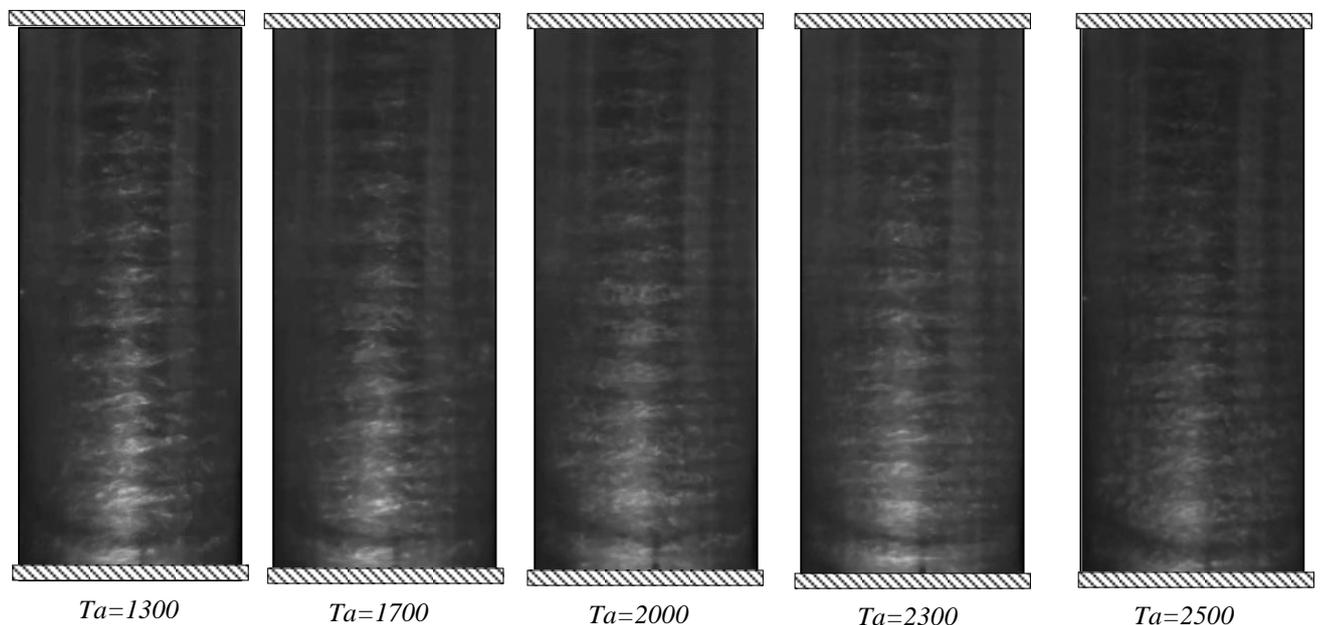
Une augmentation de la vitesse de rotation au-delà du régime ondulé modulé de Taylor (MWVF) entraîne l'apparition progressive de structures chaotiques. L'observation du comportement des particules de Kalliroscope montre une agitation globale de l'écoulement. Néanmoins, la structure des rouleaux est globalement conservée. La transition du régime MWVF à la turbulence se fait de

manière progressive ; ce qui permet de décomposer le régime turbulent des Vortex de Taylor en deux phases.

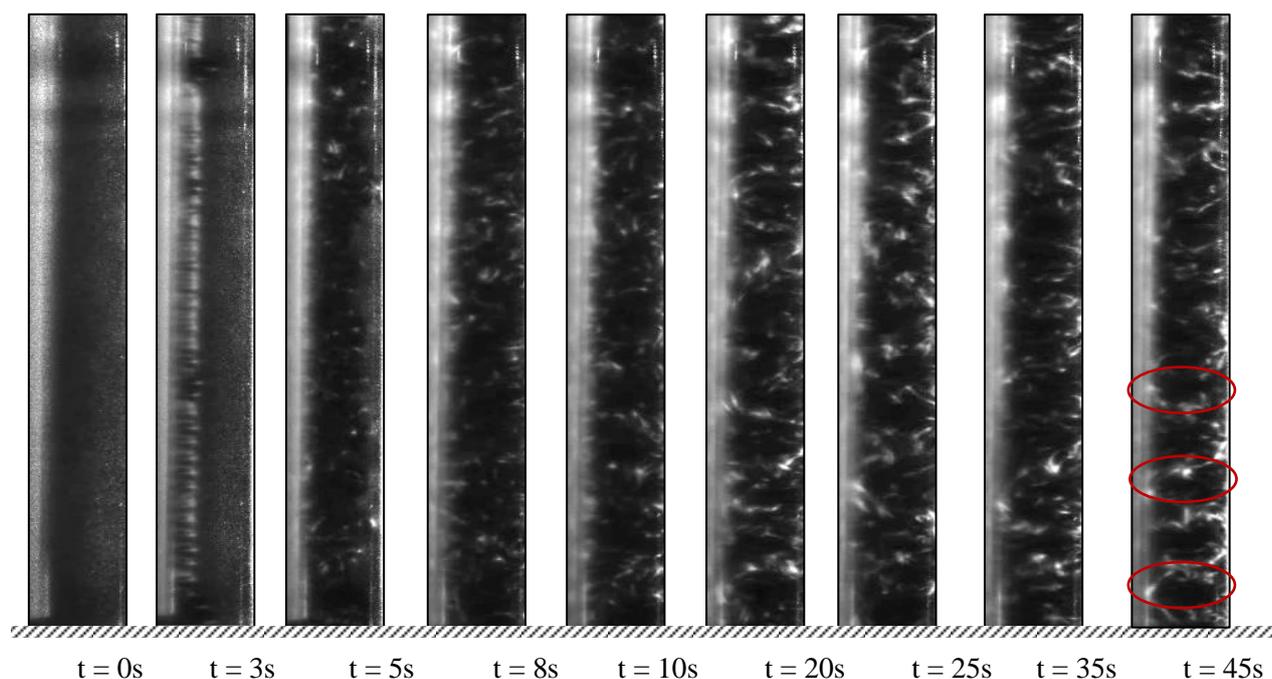
Une première phase, dite de "turbulence naissante", se caractérise par la persistance des cellules de Taylor de longueur d'onde axiale  $\lambda > 2,2.e$  ; ce qui s'accorde avec les visualisations de Nemri (2013). Les visualisations de l'écoulement ainsi effectuées dans cette partie permettent de localiser cette phase dans une gamme de nombres de Taylor allant de  $Ta=1200$  et  $Ta=2300$ . Par ailleurs, il est utile de noter que malgré la persistance des rouleaux dans cette phase, leur dénombrement exact, au moyen des visualisations, reste incertain. Ainsi, il est difficile de dénombrer visuellement ces rouleaux quand le nombre de Taylor augmente.

L'onde azimutale persiste un peu au début du régime de la turbulence naissante, mais elle finit par disparaître en augmentant le nombre de Taylor. Ceci caractérise la deuxième phase du régime turbulent de Taylor pour  $Ta > 2300$ .

Nous présentons sur la figure 5.23 ci-dessous les visualisations de l'écoulement pour le régime turbulent et pour différents nombres de Taylor caractérisant les deux phases de ce régime. Ces visualisations montrent la dissipation de l'onde azimutale.



**Figure 5.23** Visualisation globale des vortex de Taylor en régime turbulent



**Figure 5.24** : Évolution temporelle des vortex de Taylor dans le plan  $(r,z)$  en régime TTVF  $Ta=1500$

L'évolution temporelle de l'écoulement à  $Ta \approx 1500$  ;  $Ta^* \approx 33$  est présentée sur la figure (5.24). Les différentes photos de cette figure montrent le caractère chaotique du comportement des particules de kalliroscope dans l'entrefer du dispositif de Couette-Taylor, qui s'établit rapidement dès la mise en rotation du cylindre intérieur. On observe néanmoins, malgré la turbulence développée de l'écoulement, que les cellules de Taylor perdurent encore.

Après avoir établi cette cartographie de l'écoulement, nous avons pu délimiter les différents régimes de l'écoulement dans le dispositif de Couette-Taylor en fonction de la vitesse de rotation du cylindre intérieur. Nous abordons dans une seconde partie l'effet de la superposition d'un écoulement axial à ces différents régimes en vue d'étudier l'évolution du comportement des instabilités de Taylor dans l'entrefer de la veine d'essai.

### 5.3.3.2 Régime d'écoulement de Couette-Poiseuille

Cette partie est consacrée à l'étude qualitative de l'effet de la superposition d'un écoulement axial à l'écoulement de Couette-Taylor. L'écoulement ainsi obtenu se présente comme étant le résultat de deux types d'écoulement différents dans l'entrefer du dispositif de Couette-Taylor : un écoulement de Couette et un écoulement de Poiseuille. L'effet de l'écoulement axial sur le comportement des instabilités de Taylor, dépend conjointement du régime d'écoulement initial, dû à la rotation du cylindre interne et à la vitesse de l'écoulement axial. Par conséquent, la structure de l'écoulement résultant dépendra des deux paramètres adimensionnels caractérisant les deux écoulements : le nombre de Taylor et le nombre de Reynolds de l'écoulement axial.

Le dispositif expérimental de Couette-Taylor utilisé permet d'imposer un écoulement axial ascendant dans l'entrefer. Alimenté par une pompe centrifuge de capacité maximale 10 l/mn, l'écoulement parcourt un circuit fermé passant par l'espace annulaire entre les deux cylindres avant de se déverser dans un réservoir de stockage. Un débitmètre électromagnétique, placé à l'amont de la veine d'essais et relié au réservoir d'alimentation, permet de déterminer le débit de l'écoulement axial, et ainsi le nombre de Reynolds  $Re_{ax}$  correspondant, défini par :

$$Re_{ax} = \frac{U_{ax} \times 2e}{\nu} = \frac{Q \times 2e}{\nu \pi (R_{ext}^2 - R_{int}^2)} \quad (5.9)$$

$U_{ax}$  étant la vitesse axiale calculée à partir du débit volumique et de la section de passage :

$$S_p = \pi (R_{ext}^2 - R_{int}^2).$$

L'effet de la superposition de l'écoulement axial à un écoulement de Couette-Taylor sur l'apparition de la première instabilité a été initié par Goldstein (1937). A travers ses travaux analytiques, il a délimité selon les nombres Reynolds  $Re_{ax}$ , l'effet du débit axial sur la stabilité de l'écoulement.

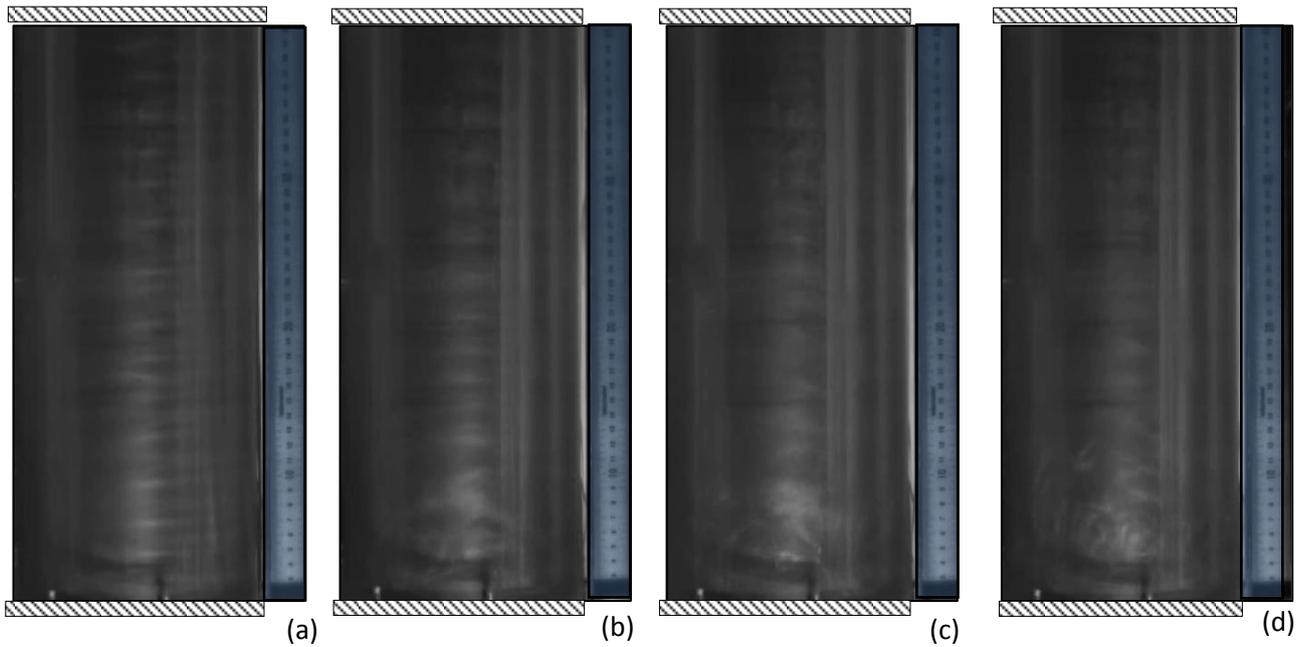
Nous avons exploité dans de ce travail, une série de visualisations de l'écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille pour chaque régime d'instabilité et pour différents nombres de Reynolds axiaux  $Re_{ax}$ . L'objectif étant d'observer le comportement de ces instabilités lors de la superposition de l'écoulement axial à celui de Couette-Taylor pour les différents débits explorés.

Le mode opératoire consiste à démarrer dans un premier temps, la rotation du cylindre intérieur et d'imposer par la suite l'écoulement axial. C'est le protocole direct. La gamme des nombres de Reynolds exploités varie de  $Re \approx 0$  jusqu'à  $Re \approx 120$ .

#### **a- Visualisation d'un écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille (protocole direct)**

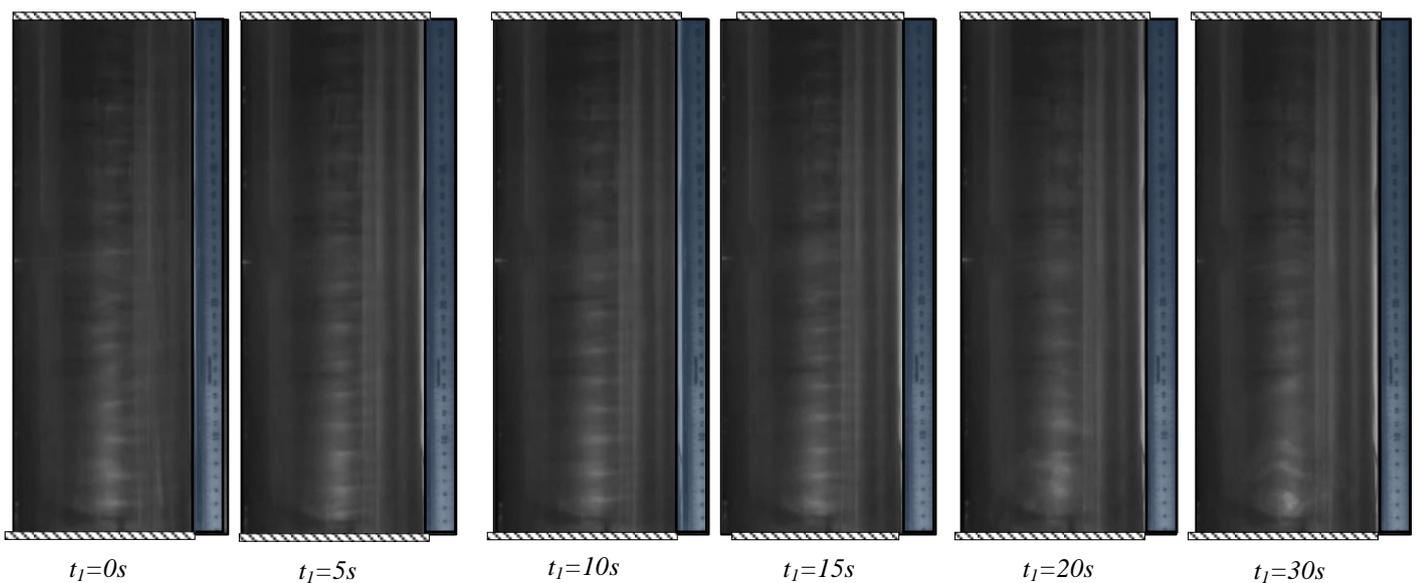
Durant ce protocole, nous avons réalisé des visualisations spatiotemporelles pour les nombres de Reynolds (correspondant à l'écoulement axial) suivants :  $Re_{ax}=1,49$ ,  $Re_{ax}=34,32$ ,  $Re_{ax} \approx 57,2$  et  $Re_{ax} \approx 120$ .

La photo de la figure 4.26, prise à un même instant  $t_1 = t - t_0$ , de l'écoulement à un Taylor  $Ta = 100$  et pour différents  $Re_{ax}$ . Où  $t_0$  correspond au déclenchement du débit axial et  $t$  le temps mesuré depuis le déclenchement de la rotation. Pour des faibles nombres de Reynolds, un mouvement ascendant des rouleaux apparaît à une vitesse proche à celle de l'écoulement axiale sans pour autant perturber leur structure torique. Les vortex de Taylor prennent, alors, la forme d'une hélice ascendante autour du centre du SCT (système de Couette Taylor). Les rouleaux deviennent linéaires et l'onde azimutale se dissipe.

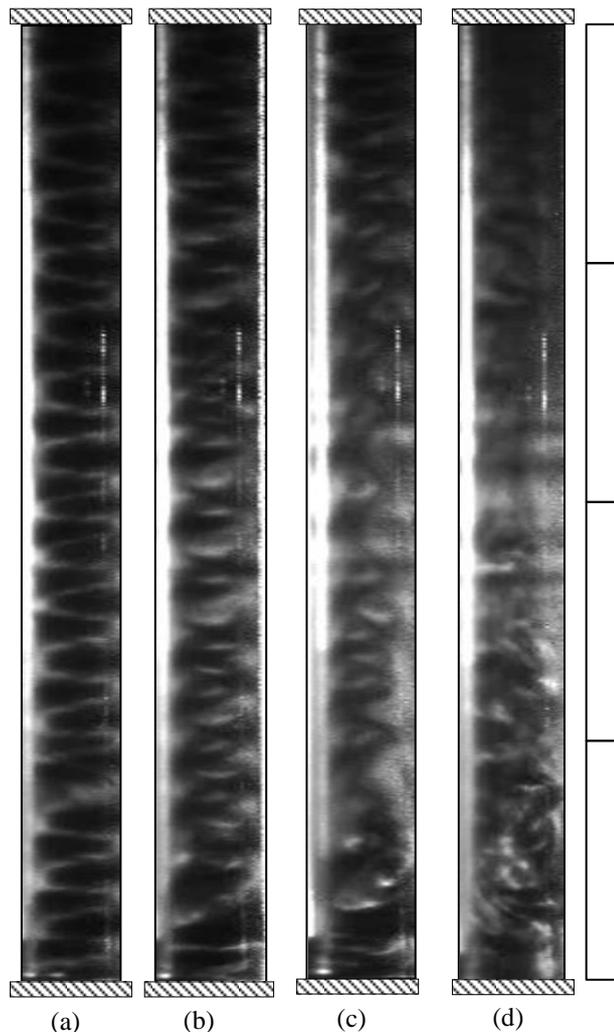


**Figure 5.25** : Écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille à  $t_1=20s$  pour  $Ta=100$  ; a)  $Re_{ax}=1,49$  ; b)  $Re_{ax}=34,32$  ; c)  $Re_{ax}=57,2$  ; d)  $Re_{ax}=120$

Pour un nombre de Reynolds axial d'environ  $Re_{ax}=34$ , les vortex hélicoïdaux remontent plus rapidement dans la direction de l'écoulement axial et commencent à se briser à la base du dispositif de Couette-Taylor (entrée de l'écoulement axial). Dans ce cas de configuration, l'écoulement axial prend le dessus sur l'écoulement de Couette-Taylor sur la partie inférieure des cylindres et l'instabilité de Taylor est alors retardée.



**Figure 5.26** : Évolution temporelle de l'écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille pour  $Ta=100$  et  $Re_{ax}=34,32$

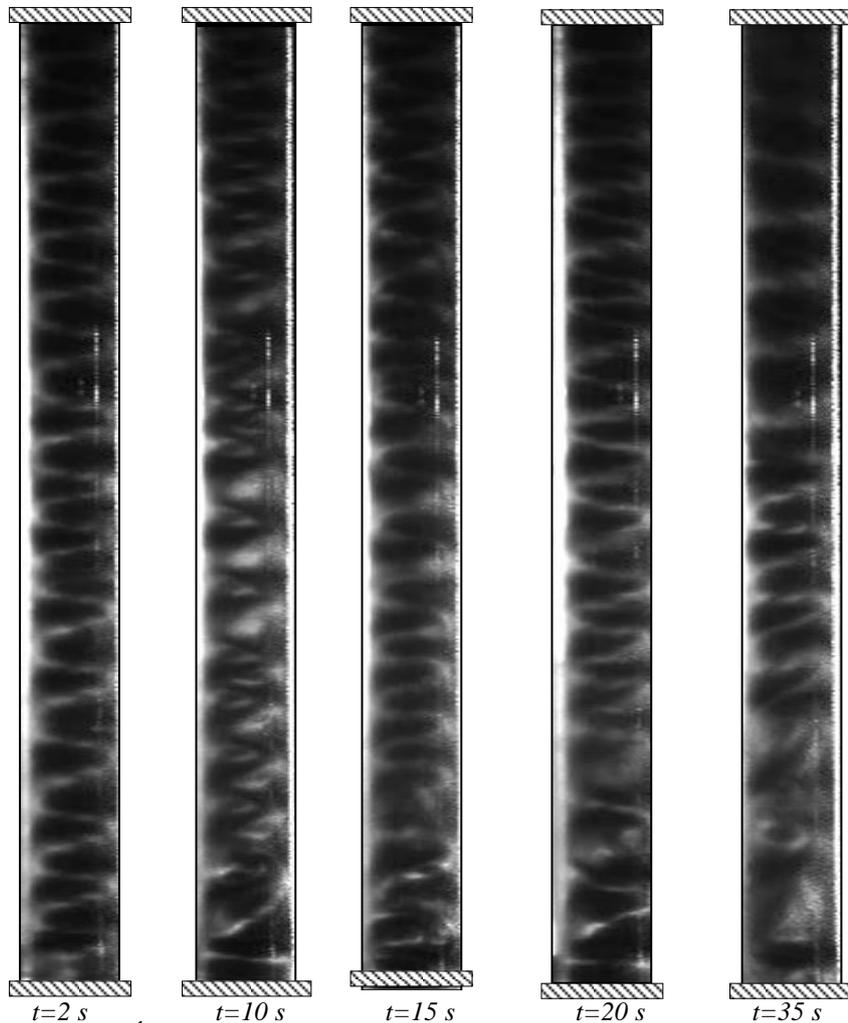


**Figure 5.27** : Écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille dans le plan  $(r,z)$  de l'entrefer à  $t_0=10s$  pour  $Ta=100$  : a)  $Re_{ax}=1,49$  ; b)  $Re_{ax}= 34,32$  ; c)  $Re_{ax}=57,2$  ; d)  $Re_{ax}=120$

En augmentant le nombre de Reynolds axial ( $Re_{ax} \approx 57$ ), l'hélice finit par se briser sur la totalité de la hauteur des cylindres avant de disparaître complètement pour un nombre de Reynolds plus élevés ( $Re_{ax}=120$ ), laissant ainsi la place à l'écoulement axial.

Le suivi spatio-temporel du déplacement de l'hélice dans la direction axiale, est illustré par les photos de la figure (5.26). Pour différents nombres de Reynolds axiaux, les instabilités de l'écoulement dans l'entrefer sur le plan  $(r,z)$  sont représentées sur les photos de la figure (5.27). Sur la figure (5.28) nous présentons également un exemple d'évolution spatio-temporelle des instabilités se développant dans l'entrefer pour un  $Ta \approx 100$  et  $Re_{ax} \approx 34$ . Ces visualisations montrent bien le déplacement, dans la direction axiale des instabilités de Taylor. A partir de  $t_I=10 s$ , les rouleaux commencent à se briser et le l'écoulement commence alors à stabiliser dans l'entrefer. Cet effet prend naissance, tout d'abord, au niveau de la partie inférieure de la veine d'essai et commence par la suite à se propager plus haut.

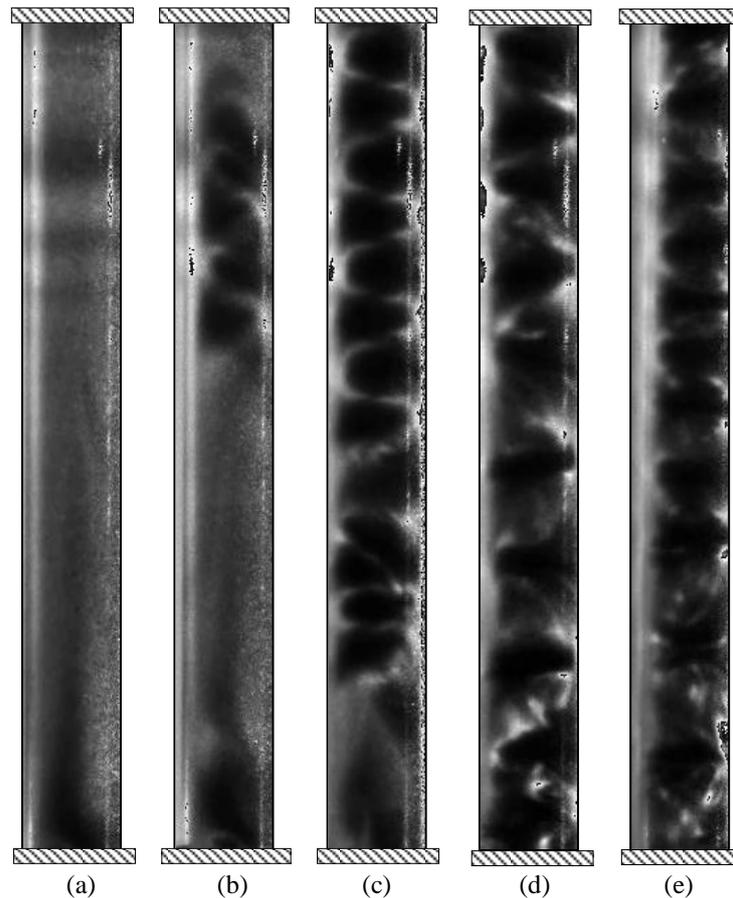
Cependant, l'effet de l'écoulement axial pour un faible débit finit par se dissiper vers une hauteur  $h_0 \approx 20 \text{ cm}$  ( $\approx 13,8.e$ ) à partir de la base des cylindres et les rouleaux reprennent leurs formes initiales.



**Figure 5.28** : Évolution temporelle des structures de l'écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille dans le plan  $(r,z)$  de l'entrefer pour  $Ta=100$  et  $Re_{ax}=35$

### b- Protocole inverse

Dans cette partie, nous avons inversé le protocole opératoire en imposant au départ un débit axial dans l'espace annulaire avant de mettre en rotation le cylindre intérieur du dispositif de Couette-Taylor. Pour cela, nous avons fixé un nombre Reynolds axial  $Re_{ax} \approx 34$ , puis nous avons fait varier par la suite la vitesse de rotation du cylindre interne afin de balayer les différents régimes d'instabilités. Ceci nous a permis de mettre en évidence l'effet de rotation sur l'écoulement axial à débit constant. Les captures d'images sont déclenchées à partir de la mise en rotation du cylindre intérieur, instant considéré comme l'origine du repère temporel. Les visualisations de l'écoulement dans l'entrefer en coupe  $(r,z)$  à un instant  $t_2 \approx 70 \text{ s}$  sont illustrées par les images de la figure (5.29). Le choix de l'instant d'illustration est relatif au début de chaque phénomène d'instabilité observé.



**Figure 5.29** : Visualisation de l'écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille dans le plan  $(r,z)$  dans l'entrefer lors du protocole inverse pour  $t_2=70$  s et pour  $Re_{ax}=34$  : a)  $Ta=46$  ; b)  $Ta=77$  ; c)  $Ta=120$  ; d)  $Ta=384$  ; e)  $Ta=680$

Les visualisations ainsi obtenues montrent que pour un écoulement axial établi dans l'espace annulaire entre les deux cylindres avec un Reynolds  $Re_{ax}=34$ , la rotation du cylindre interne modifie la structure des instabilités dans l'écoulement.

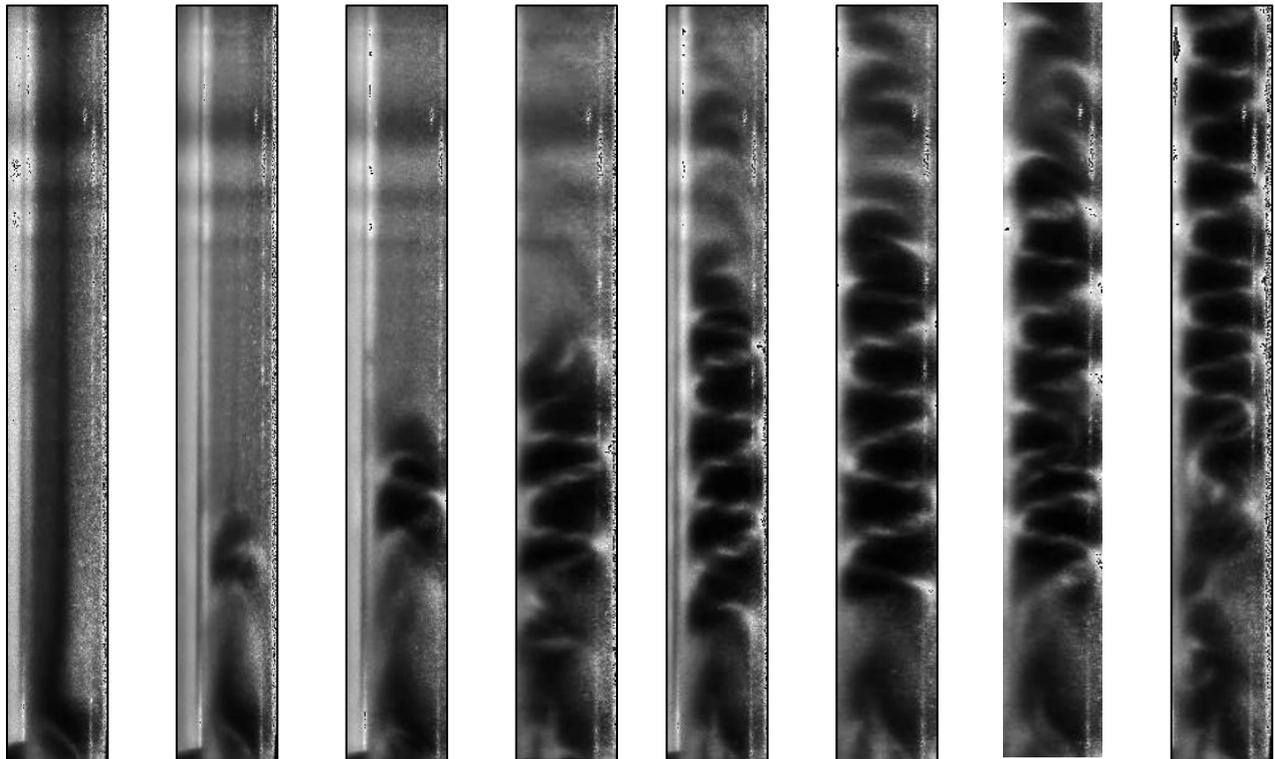
Pour le nombre de Taylor critique dans le cas d'un écoulement de Couette-Taylor, les instabilités caractéristiques n'ont pas pu se former pour l'écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille. Dans ce cas, l'effet stabilisant de l'écoulement axial reste prépondérant par rapport à l'effet centrifuge.

En augmentant la vitesse de rotation du cylindre jusqu'à un  $Ta=77$  environ, l'écoulement axial garde sa stabilité jusqu'à un temps  $t=56$  s où des cellules de Taylor commencent à se former à une hauteur  $h_0 \approx 18$  cm  $= 12,4.e$  et commencent à remonter dans l'entrefer suivant la direction de l'écoulement axial.

Pour une vitesse de rotation plus importante ( $Ta=120$ ), des cellules de Taylor prennent naissance à  $t=16$  s tout d'abord, à une hauteur  $h_0 \approx 8$  cm  $= 5,5.e$  de la base inférieure du dispositif et commencent à se propager en conséquence dans la direction de l'écoulement tout en accomplissant leur formation. Par la suite à  $t=33$  s, ces cellules sont rattrapées par de nouvelles autres cellules

généérées directement au-dessus de ce train d'instabilités à une hauteur  $h_1 \approx 23 \text{ cm} = 15,7.e$ . Finalement, l'effet centrifuge devient dominant et les cellules de Taylor s'installent sur la majorité de l'espace annulaire en se déplaçant dans la direction de l'écoulement. Néanmoins, au niveau de la partie inférieure du dispositif correspondante à l'entrée de l'écoulement axial et se situant à environ

$10 \text{ cm} = 6,9.e$ , les vortex formés se brisent et l'écoulement reste stable. L'évolution spatio-temporelle du comportement des instabilités de l'écoulement pour ce nombre de Taylor est représentée sur la figure (5.30) ci-dessous.



**Figure 5.30** : Évolution temporelle d'un écoulement de Couette-Taylor-Poiseuille dans le plan  $(r,z)$  de l'entrefer pour  $Ta=120$  en protocole inverse

Pour des nombres de Taylor plus importants, l'effet de la rotation du cylindre domine nettement l'effet de l'écoulement axial, et les cellules de Taylor se forment très rapidement sur toute la hauteur de l'espace annulaire. On note ainsi la formation des rouleaux de Taylor à  $t=15 \text{ s}$  pour  $Ta=384$  et à  $t=9 \text{ s}$  pour  $Ta=680$ .

En résumé, une compétition est maintenue entre l'effet déstabilisateur créé par la rotation du cylindre interne (entraînant la formation des structures de Taylor) et l'effet stabilisant de l'écoulement axial qui tient à éliminer ces instabilités. Les résultats de visualisation des effets de la superposition d'un écoulement axial à un écoulement de Couette-Taylor établi sont concordants avec l'étude qualitative menée par Berrich (2011), principalement pour le régime TVF dans le cas du protocole direct. Nous présentons dans la suite, l'effet de la superposition d'un écoulement axial à un écoulement de Couette-Taylor sur la transition vers la turbulence.

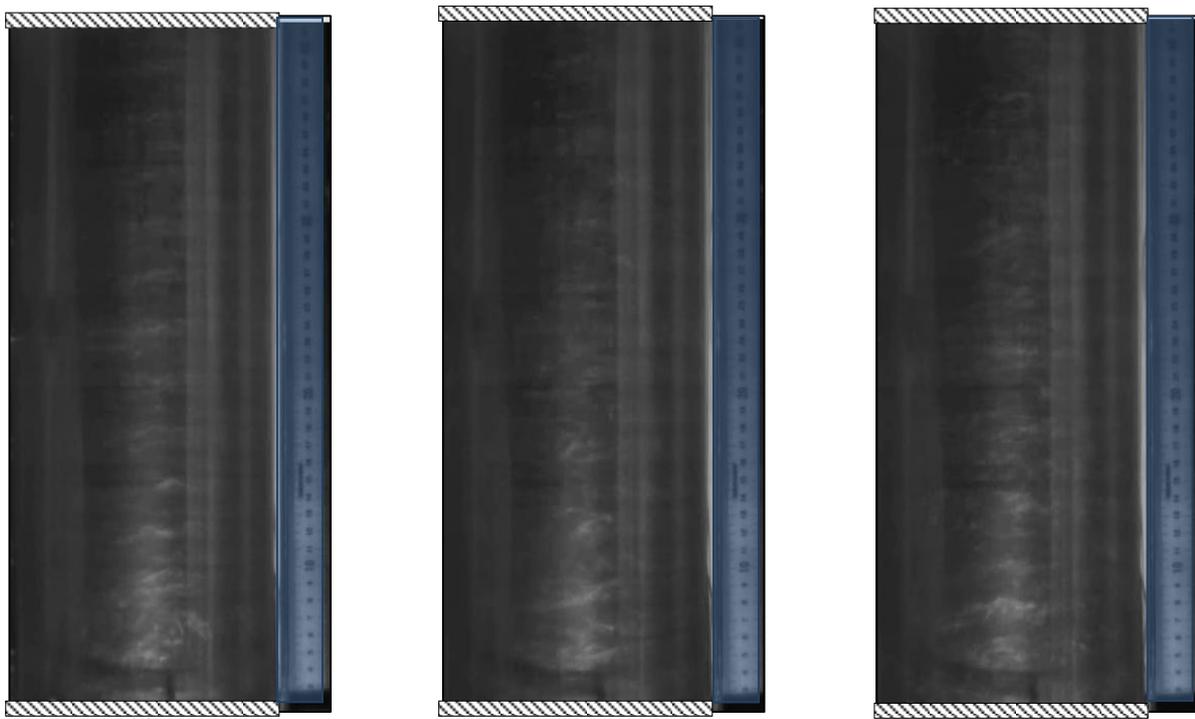
### 5.3.3.3 Régime turbulent avec écoulement axial

Dans cette partie, lors des visualisations des instabilités dans l'entrefer entre les deux cylindres pour l'un écoulement de Couette-Taylor en régime turbulent superposé à un écoulement axial, les deux protocoles opératoires (direct et inverse) cités précédemment ont été employés. Les cartographies des écoulements ainsi obtenus sont alors présentées et comparées au cas d'un écoulement turbulent sans débit axial.

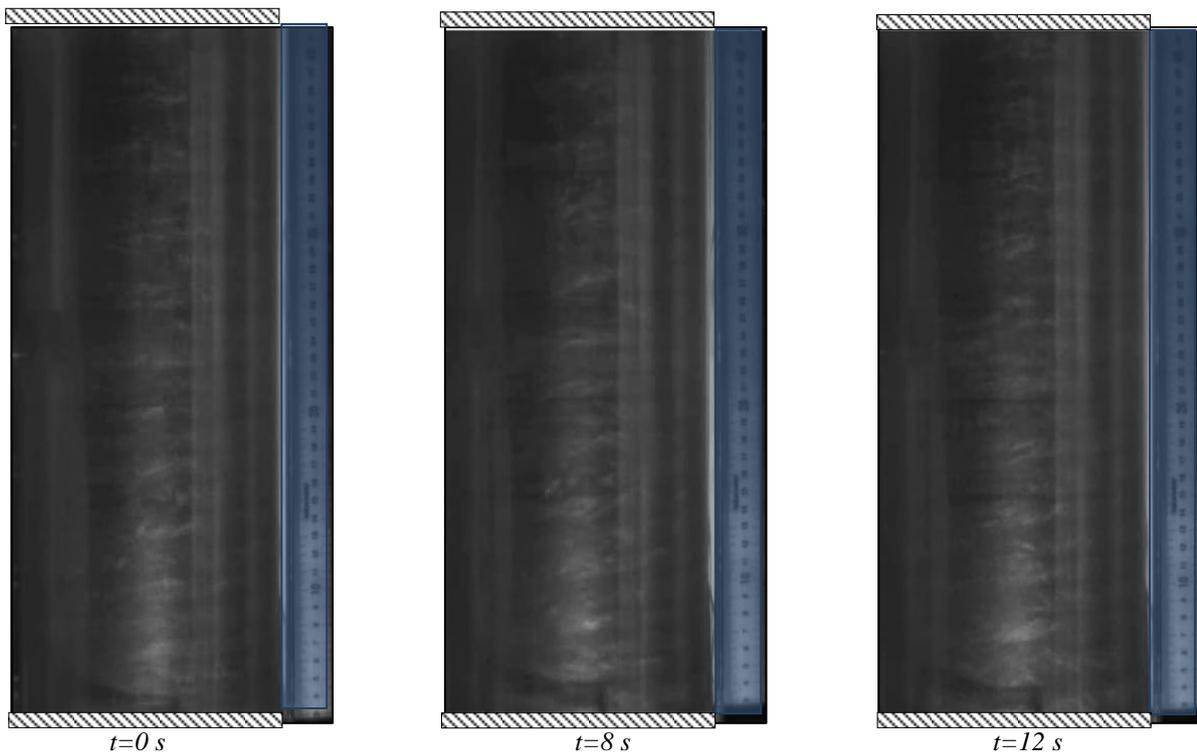
#### Protocole direct

Lors de ce protocole, nous avons considéré dans un premier lieu un écoulement axial développé, pour trois nombres de Reynolds axiaux différents :  $Re_{ax} \approx 34$ ,  $Re_{ax} \approx 57$  et  $Re_{ax} \approx 120$ , superposé à un écoulement de Couette-Taylor en Régime turbulent à  $Ta=1228$ . Les captures d'images obtenues et qui présentent le comportement global de l'écoulement au même instant  $t_0$ , sont représentées sur la figure (5.31). Pour le débit axial le plus important ( $Re_{ax} \approx 120$ ), le déclenchement du débit axial entraîne les vortex turbulents dans la direction de l'écoulement sans pour autant affecter leur structure. Par contre, pour le cas des faibles débits ( $Re_{ax} \approx 34$ ), la superposition de l'écoulement axial n'entraîne pas une modification perceptible sur le comportement de l'écoulement résultant. L'écoulement dû à l'effet centrifuge est alors prédominant, limitant ainsi le déplacement des instabilités.

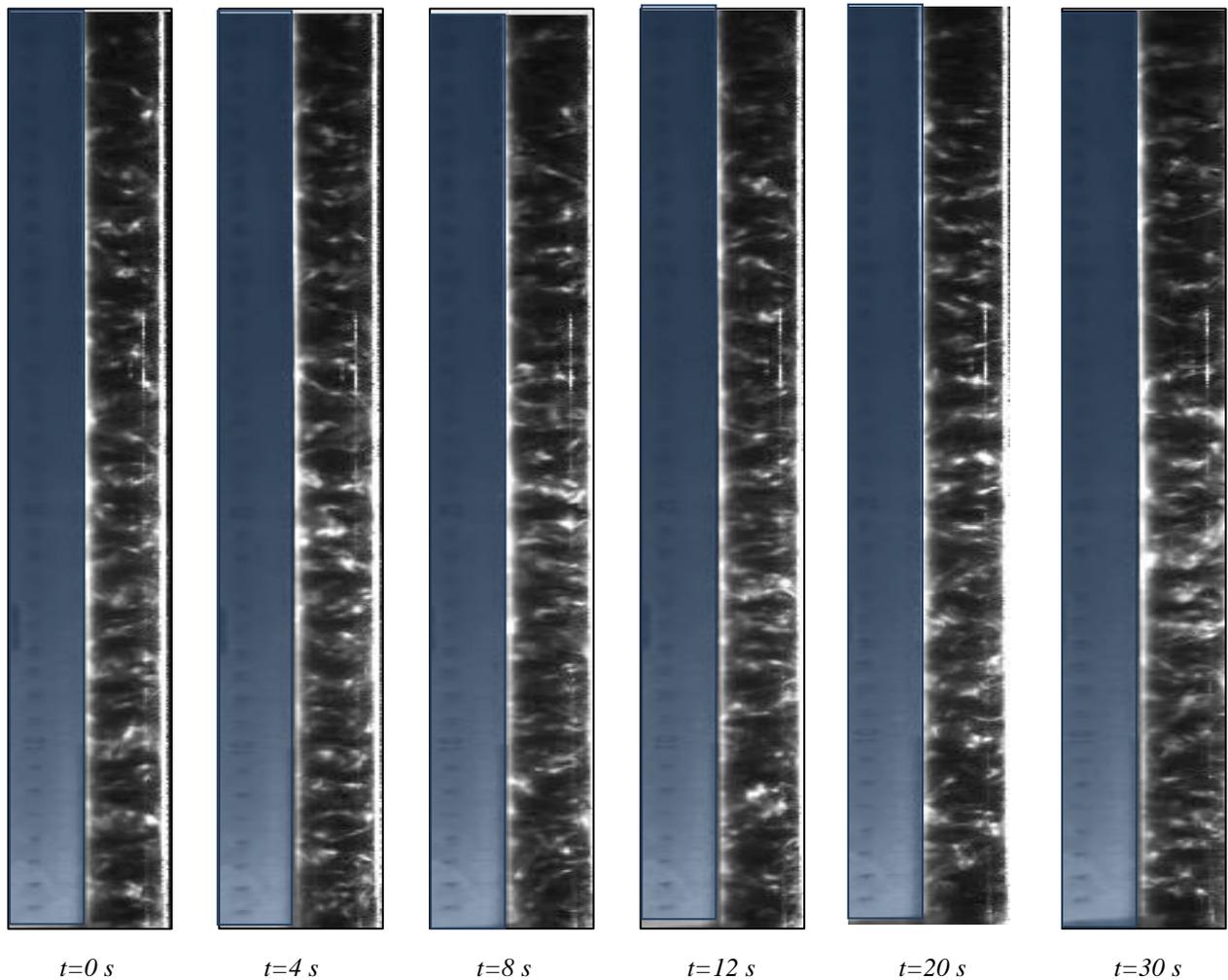
L'évolution temporelle de l'écoulement pour un  $Re_{ax} \approx 120$  est représentée sur la figure (5.32). L'écoulement dans le plan  $(r,z)$  de l'entrefer est représenté par les figures (5.33). Ces visualisations montrent l'effet de l'écoulement axial sur les vortex turbulents. On observe alors le déplacement de ces vortex dans la direction de l'écoulement axial dès le déclenchement du débit axial. D'autre part, à partir de  $t_1 > 12 s$ , une zone de hauteur  $h_0 \approx 10 cm = 6,9.e$  est alors créée et dans laquelle les vortex sont brisés et où l'écoulement devient purement chaotique.



**Figure 5.31** : Écoulement de Couette-Taylor turbulent  $Ta=1228$  avec écoulement axial superposé (protocole direct) : a)  $Re_{ax}=34,32$  ; b)  $Re_{ax}=57,2$  ; c)  $Re_{ax}=120$  à  $t_0=30s$



**Figure 5.32** : Visualisations temporelle des instabilités dans le plan  $(r,z)$  d'un écoulement turbulent de Couette-Taylor à  $Ta=1228$ , superposé à un écoulement axial (protocole direct) pour  $Re_{ax}=120$  (photographies à différents instants).

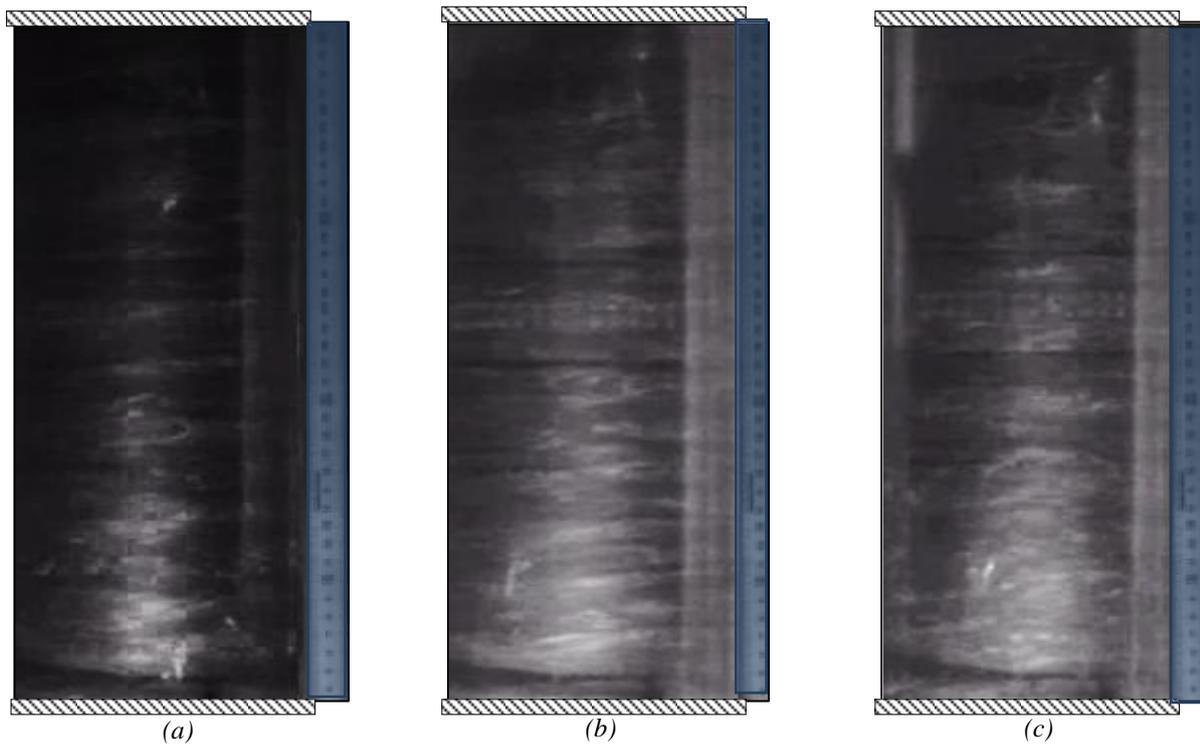


**Figure 5.33** : Visualisations des instabilités dans le plan  $(r,z)$  d'un écoulement turbulent de Couette-Taylor  $Ta=1228$ , superposé à un écoulement axial (protocole direct) pour  $Re_{ax}=120$

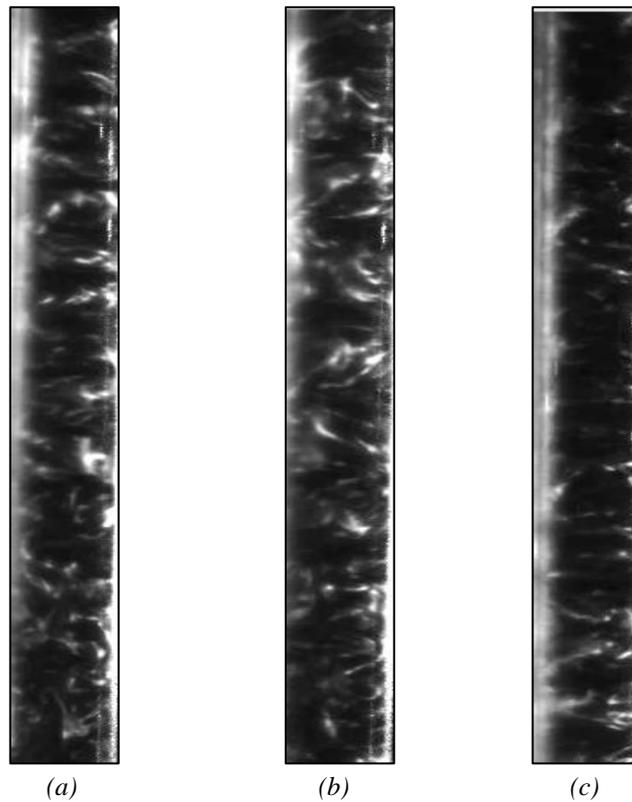
### Protocole inverse

Nous considérons, maintenant le protocole inverse. En effet, trois débits axiaux sont alors considérés correspondant à 3 valeurs du nombre de Reynolds  $Re_{ax}=34$ ,  $Re_{ax}=57$  et  $Re_{ax}=120$ , auxquels on superpose un écoulement turbulent de Couette-Taylor où  $Ta=1228$ .

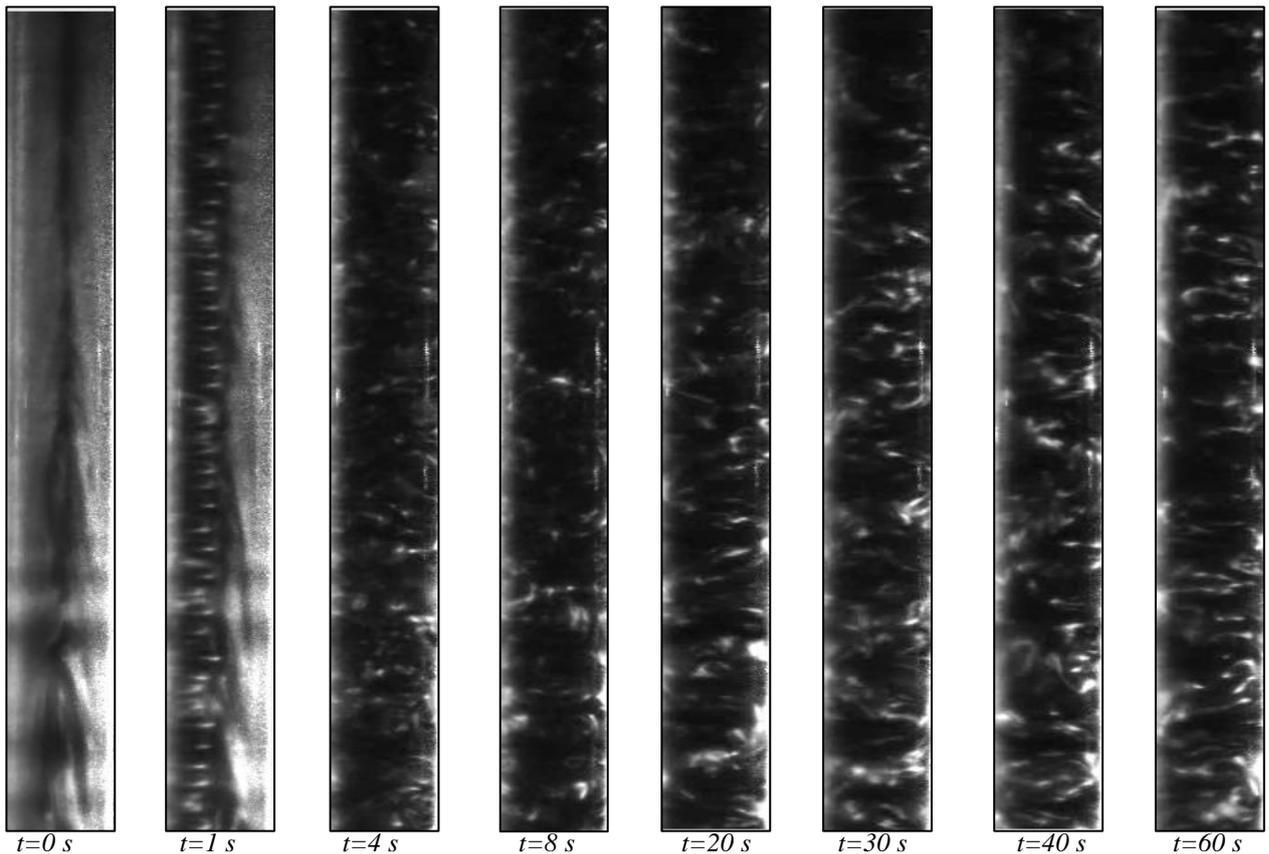
Les photos de visualisation de cet écoulement sont représentées sur la figure (5.34). Ces dernières montrent l'apparition de vortex hélicoïdaux turbulents dans l'entrefer le long des cylindres, prédominant ainsi l'écoulement axial malgré l'importance du débit axial. Dans cette configuration, les vortex se déplacent dans la direction ascendante axiale, contrairement à l'écoulement à faible nombre de Reynolds axial  $Re_{ax}$ , où l'effet du mouvement centrifuge est complètement prédominant. Le plan  $(r,z)$  de l'écoulement dans l'entrefer est représenté sur la figure (5.35). En effet, pour des nombres de Reynolds axiaux relativement importants ( $Re_{ax}=120$ ), l'écoulement axial entraîne une destruction des tourbillons. La figure (5.36) présente l'évolution temporelle du mouvement des instabilités dans le plan  $(r,z)$  pour un écoulement axial à  $Re_{ax}=120$ , superposé à un écoulement turbulent de Couette-Taylor à  $Ta=1228$ .



**Figure 5.34** : Écoulements axiaux (pour : a)  $Re_{ax}=34$  ; b)  $Re_{ax}=57$  et c)  $Re_{ax}=120$ , superposés à un écoulement de Couette-Taylor turbulent ( $Ta=1200$ ) : Photographies prises à l'instant :  $t_0=30$  s



**Figure 5.35** : Écoulements axiaux (pour : a)  $Re_{ax}=34$  ; b)  $Re_{ax}=57$  et c)  $Re_{ax}=120$ ), superposés à un écoulement de Couette-Taylor turbulent ( $Ta=1200$ ) : Photographies prises à l'instant :  $t_0=60$  s



**Figure 5.36** : Visualisations des instabilités dans le plan  $(r,z)$  d'un écoulement axial pour  $Re_{ax}=120$ , superposé à un écoulement turbulent de Couette-Taylor (protocole inverse) avec  $Ta=1228$

#### 5.3.3.4 Conclusion

L'utilisation des particules anisotropes de kalliroscope pour la visualisation des structures tourbillonnaires de l'écoulement dans l'entrefer du dispositif expérimental, s'avère un moyen efficace pour la description des différents régimes d'instabilités.

Les visualisations nous ont permis d'établir une description qualitative de l'écoulement de Couette-Taylor et d'observer l'aspect des instabilités selon les différentes vitesses de rotation imposées au cylindre interne mobile (le cylindre externe étant fixe). En conséquence, en se basant sur le comportement des vortex de Taylor, nous avons pu délimiter les régimes d'écoulement, en termes du nombre de Taylor. Ces régimes sont connus sous les nom respectifs : Taylor vortex Flow( TVF), Wavy Vortex Flow (WVF), Modulated Wavy Vortex flow (MWVF) et Turbulent Taylor Flow (TTF). Dans un second lieu, nous avons observé le comportement de l'écoulement de Couette-Taylor combiné à un débit axial dans l'espace annulaire. L'écoulement résultant peut donner alors naissance à deux types d'instabilités différentes : une instabilité due au mouvement centrifuge et une autre due au cisaillement. Les seuils de leurs apparitions sont, en conséquence, conditionnés par la nature de la superposition des deux écoulements en compétition. En effet, deux modes opératoires ont été employés, selon l'écoulement initial développé dans le l'espace annulaire et l'écoulement qui lui est superposé. Les résultats de visualisations ainsi obtenus, montrent plusieurs phénomènes : L'apparition des instabilités peut se manifester par l'apparition

d'une hélice montante dans la direction de l'écoulement axial qui peut disparaître dans certaines conditions. Par ailleurs, l'écoulement résultant dans l'entrefer dépend, d'une part des paramètres dynamiques de chaque écoulement (nombre de Reynolds axial  $Re_{ax}$  et nombre de Taylor  $Ta$ ) et d'autre part du protocole expérimental adopté (protocole direct ou inverse). Ces observations sont en accord avec les résultats de Wereley et Lueptow (1999) et de Berrich (2011). Ces résultats permettent ainsi de décrire expérimentalement le comportement d'un écoulement de Couette-Taylor et de fournir ainsi une cartographie de l'écoulement.

### **5.3.2 Étude quantitative de l'écoulement de Couette-Taylor par la technique de Vélocimétrie par images de particules (PIV)**

Dans une première étape, nous exposons les résultats issus des mesures dans les régimes WVF, MWVF et TTF. Par la suite, nous présentons les résultats des différentes campagnes de mesures effectuées en superposant un débit axial à l'écoulement de Couette-Taylor en régime WVF.

La dernière partie est consacrée à la présentation des résultats obtenus lors de la synchronisation des mesures par PIV et Electrochimie.

La synchronisation de la technique de PIV avec la méthode polarographique nécessite que le plan laser doit passer au-dessus des sondes électrochimiques. Vu la géométrie de l'extérieur du cylindrique fixe du dispositif, des erreurs significatives peuvent être générées suite aux réflexions des parois. La nappe laser doit alors être bien positionnée et doit avoir une épaisseur assez fine.

La taille de la fenêtre d'interrogation doit être prise de manière à assurer une bonne précision des champs de vitesse en s'approchant au mieux de la paroi. Lors des différentes mesures effectuées par PIV, nous avons choisi une fenêtre d'interrogation de dimensions  $12 \times 12$  pixels avec un recouvrement 50%. Ainsi, la taille d'un pixel correspond à  $109,24 \mu m$  ; soit le dernier pixel est à environ  $0,0075.e$  de la paroi. Les incertitudes sur les différentes mesures par PIV sont alors dans une gamme assez faible, comprises entre 2% et 3%.

Pour chaque campagne de mesures effectuée, une série de 1000 champs de vitesse instantanés est acquise puis post-traitée grâce à une interface d'acquisition ( logiciel Insight 4G de TSI).

#### **5.3.2.1 Dynamique de l'écoulement de Couette-Taylor en régime WVF**

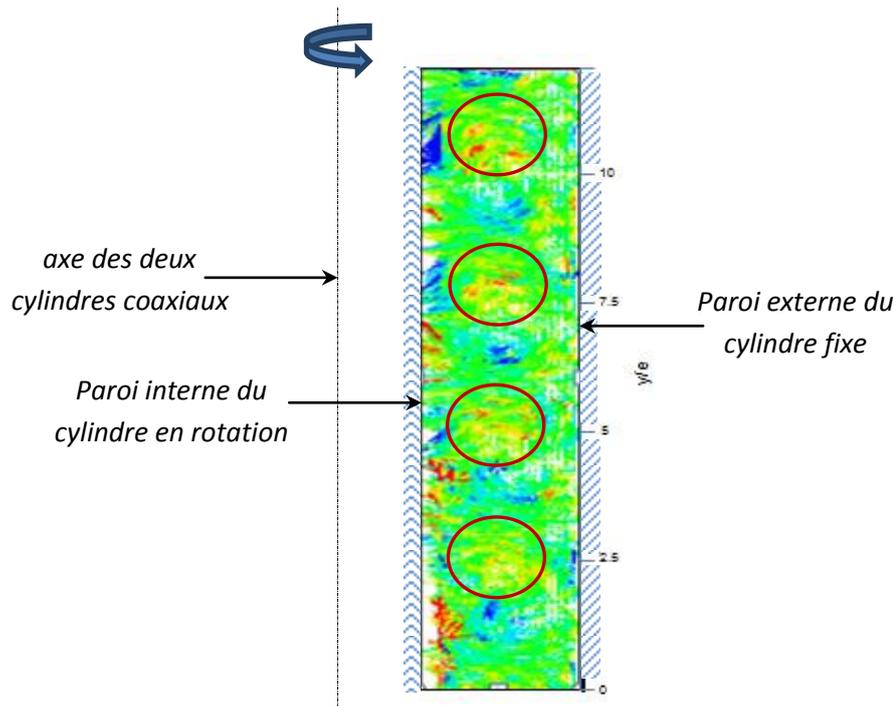
Nous présentons dans cette partie une analyse d'un écoulement en régime WVF au moyen des mesures instantanées par la technique de PIV classique. Celles-ci nous ont permis de déterminer les champs de vitesses instantanés dans une zone de l'entrefer très proche de la sonde électrochimique pour un nombre de Taylor  $Ta=120$  ( $Ta^* \approx 2,62$ ).

Deux configurations ont été étudiées : un écoulement de Couette-Taylor avec et sans débit axial et dans l'entrefer. Pour la cas où un écoulement axial est présent, plusieurs débits axiaux ont bien été

explorés. L'écoulement WVF a été choisi du fait que les cellules de Taylor se caractérisent par un développement complet au cours de ce régime et présentent une bonne organisation axiale.

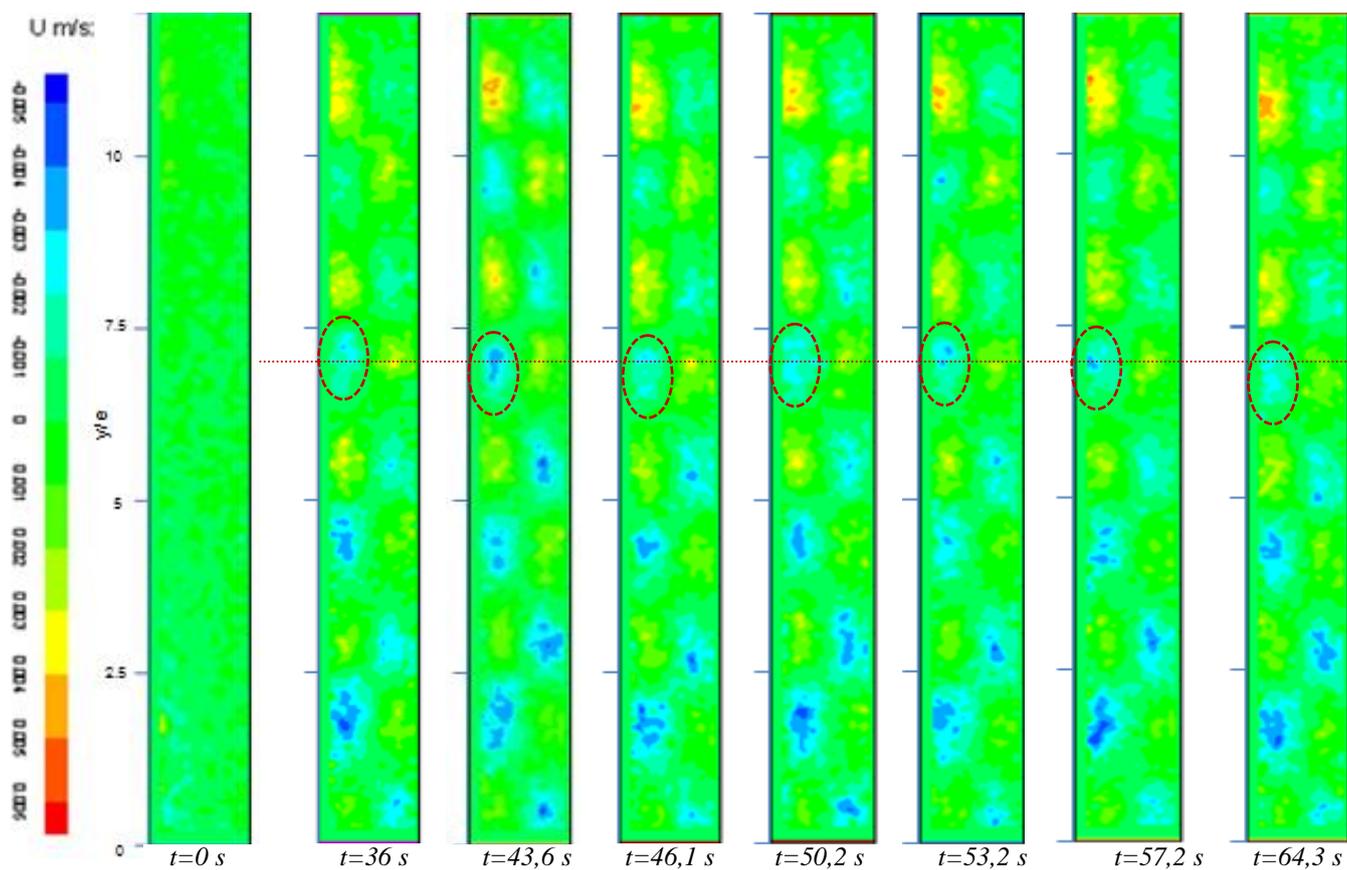
#### a- Régime d'écoulement WVF sans débit axial

La figure 5.37 représente un champ instantané de vitesse dans l'entrefer entre les deux cylindres. En effet, celle-ci montre un développement des structures tourbillonnaires le long de l'espace annulaire, caractérisant le régime des rouleaux de Taylor ondulés (WVF). La taille des instabilités et leurs caractéristiques dynamiques sont alors exposées.

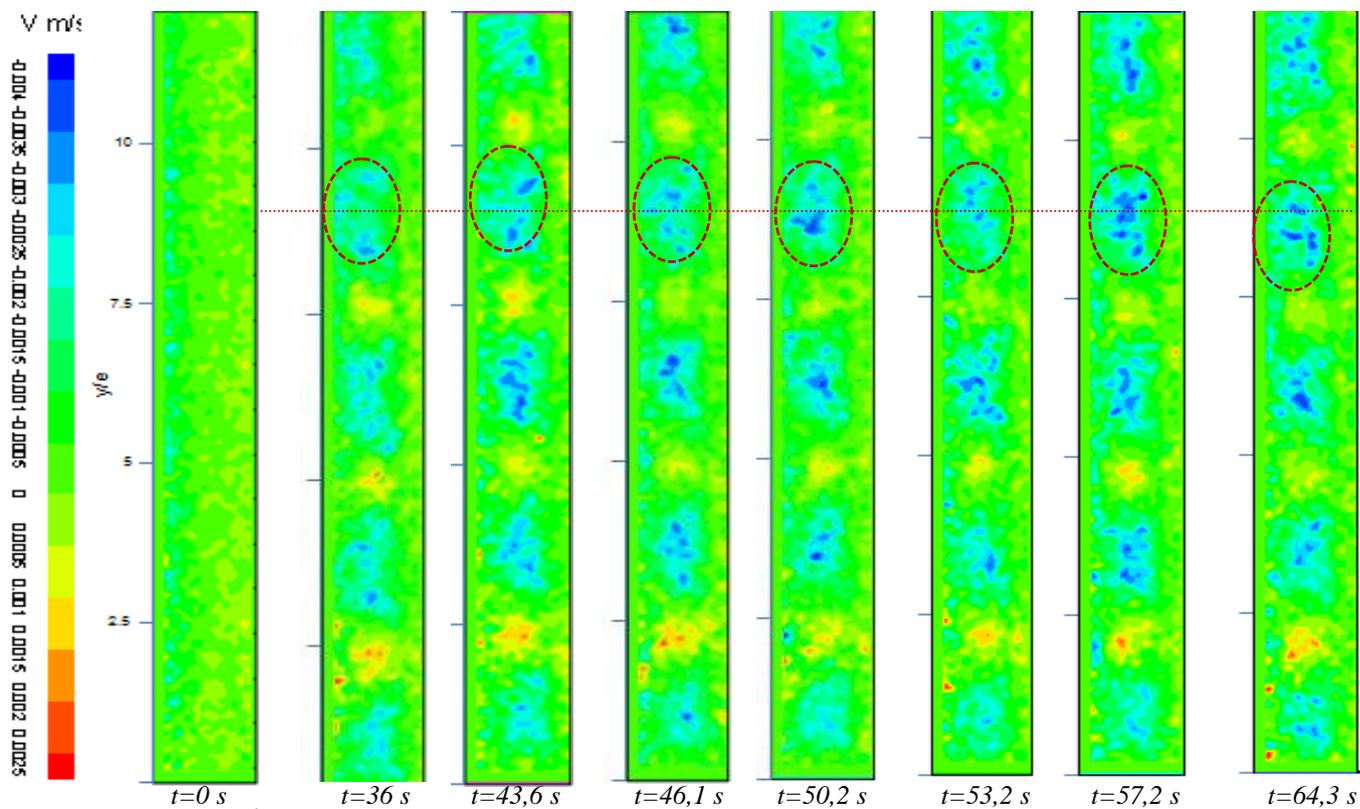


**Figure 5.37** : Exemple de champ de vitesse instantané obtenu par PIV (superposé au contour de vorticité) pour  $Ta=120$  et sans écoulement axial

Les figures (5.38-39) présentent une série de snapshots permettant de tracer un suivi spatio-temporel de la formation des instabilités de Taylor. Celle-ci permet de caractériser la formation des instabilités et d'analyser leur comportement dynamique dans l'entrefer.



**Figure 5.38** : Évolution spatio-temporelle des iso-contours de la composante axiale ( $U$ ) de vitesse par PIV à  $Ta=120$  sans écoulement axial

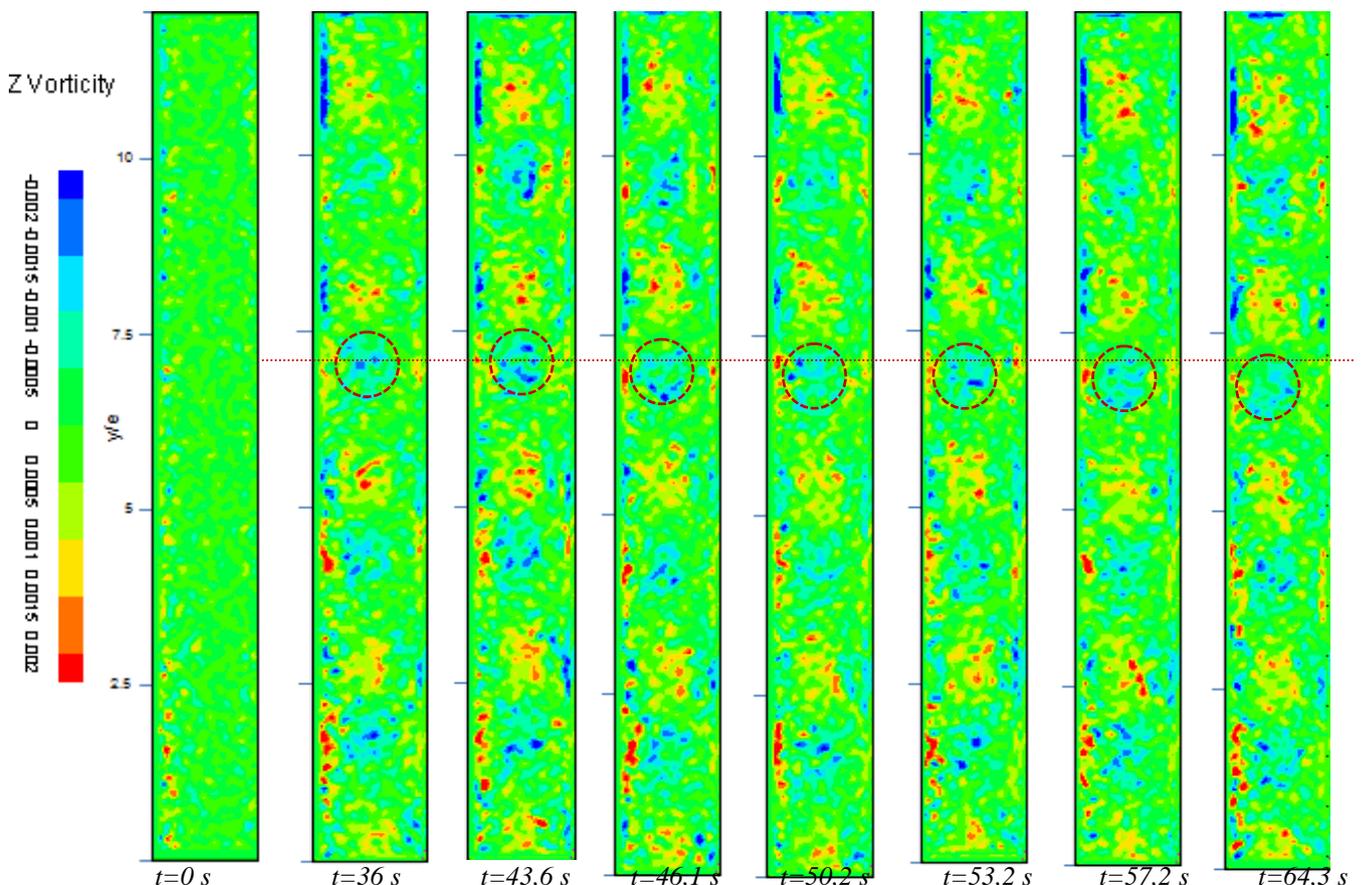


**Figure 5.39** : Évolution spatio-temporelle des iso-contours de la composante radiale ( $V$ ) de vitesse obtenue par PIV à  $Ta=120$  et sans écoulement axial

Les champs de vitesse montrent la présence des tourbillons contrarotatifs le long de l'entrefer entre les deux cylindres coaxiaux. Ces tourbillons de Taylor présentent une périodicité axiale de longueur d'onde  $\lambda \approx 2,6.e$ . Le suivi spatio-temporel des iso-contours des composantes de vitesse montrent le comportement des vortex de Taylor dans l'espace annulaire qui présente une légère oscillation correspondante à l'ondulation azimutale.

L'application des critères de détection de structures tourbillonnaires permet de mieux mettre en évidence et de caractériser ce type d'instabilité. Pour cela, nous avons appliqué deux types de critères : la vorticité et le critère  $\Gamma_2$  qui sont appliqués aux champs de vitesse obtenus par PIV. Les figures (5.40) et (5.41) illustrent l'évolution spatio-temporelle de ces deux critères

L'utilisation du critère de vorticité fait apparaître deux types de tourbillons contrarotatifs oscillant le long de l'entrefer. Ces vortex sont marqués par les valeurs de vorticité négatives et positives alternées. Les centres des tourbillons sont définis par ce critère, comme étant un extremum local (Strawn et al., 1999). Cependant, l'utilisation de la vorticité est inappropriée lorsqu'il y a un fort cisaillement pariétal. Dans ces conditions, d'autres méthodes de détection comme le critère  $\Gamma_2$  pourrait être appliqué aux champs de vitesse instantanés mesurés par PIV. La figure suivante (5.41) illustre bien ce critère.

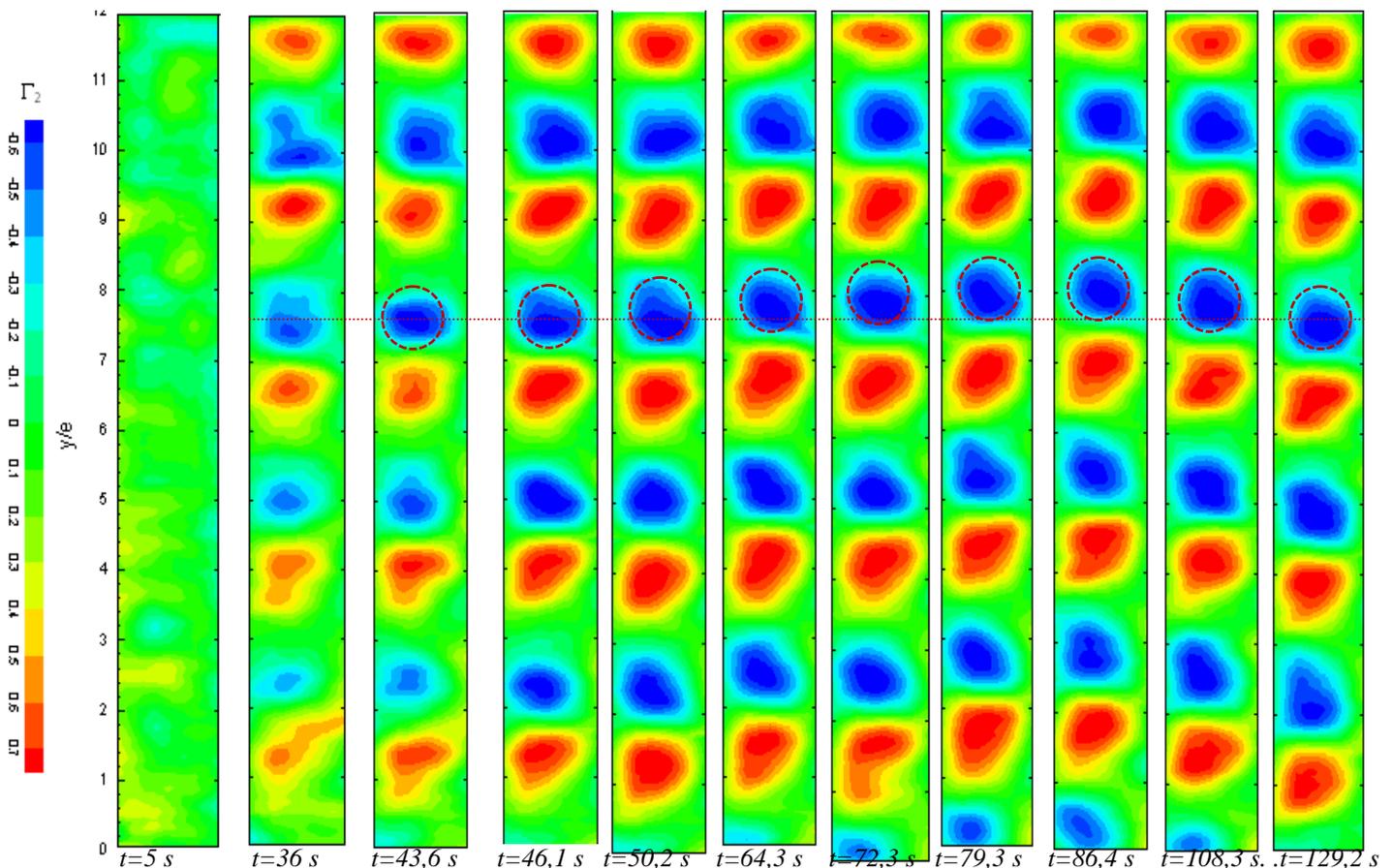


**Figure 5.40 :** Évolution spatio-temporelle des iso-contours de la vorticité obtenues à partir des champs instantanés de vitesse mesurés par PIV pour  $Ta=120$  sans écoulement axial

Le critère  $\Gamma_2$  fait alors apparaître nettement les deux types de vortex contrarotatifs bien développés, et qui sont caractéristiques de l'écoulement de Taylor. Ces instabilités sont marquées par les valeurs négatives ou positives et leurs centres sont repérés par des valeurs où  $|\Gamma_2| = 1$ .

Ces résultats obtenus à partir des mesures par PIV, nous permettent d'établir une analyse quantitative des caractéristiques des vortex de Taylor générés dans le dispositif de Couette-Taylor. Nous pouvons ainsi déterminer directement les propriétés de ces vortex, tels que leur nombre, leurs longueurs d'ondes, leurs caractéristiques dynamiques ainsi que l'évolution de leurs formes dans le temps.

Nous avons dénombré sur une longueur de  $y/e=12$ , à l'aide des distributions spatiales de l'écoulement, 4,5 paires de vortex contrarotatifs développés et oscillant le long de l'axe de l'écoulement. La longueur d'onde correspondante aux vortex est alors égale à  $\lambda \approx 2,66 e$ . Cette valeur permet de bien confirmer les résultats qualitatifs obtenus grâce à la visualisation de la dynamique de l'écoulement par les particules de kalliroscope.

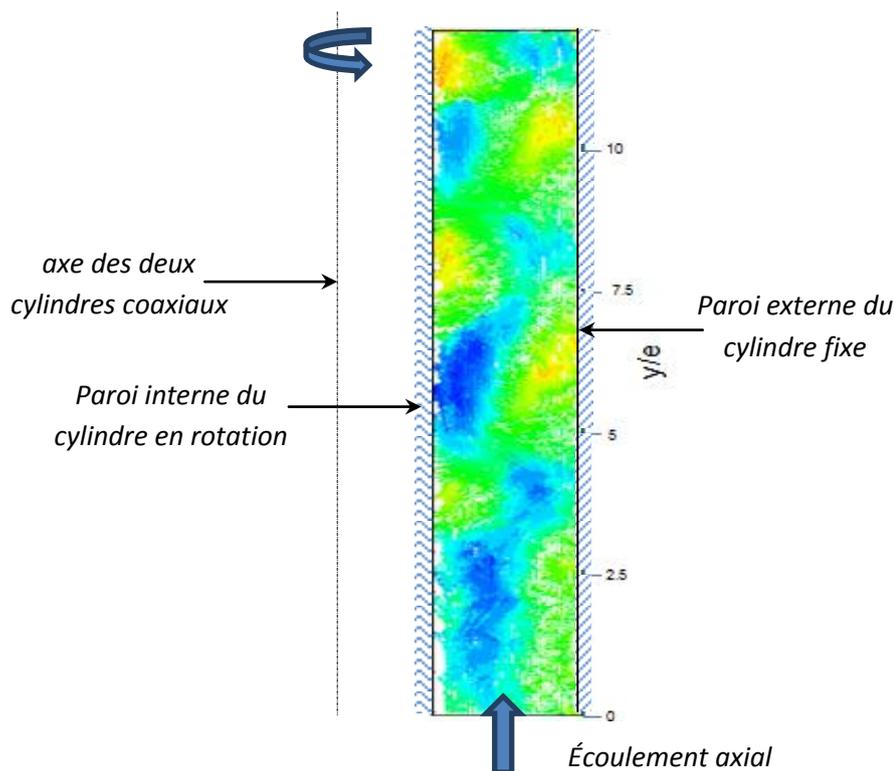


**Figure 5.41** : Évolution spatio-temporelle des iso-contours du critère  $\Gamma_2$  pour  $Ta=120$  et sans écoulement axial

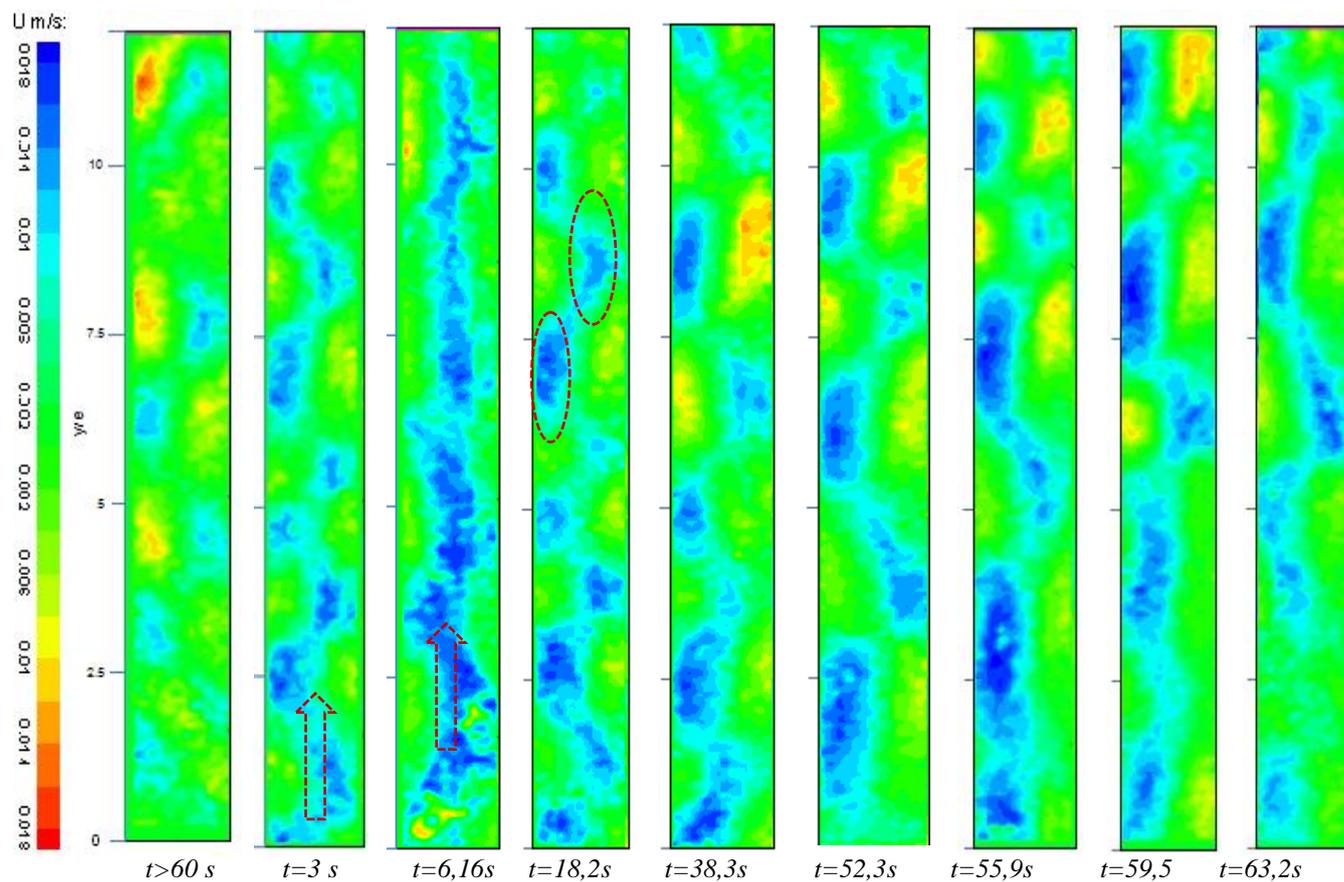
### b- Régime d'écoulement WVF avec débit axial

L'objectif de cette partie est de caractériser l'effet de la superposition d'un écoulement axial dans l'entrefer à un écoulement de Couette-Taylor établi au préalable. Nous avons ainsi considéré un régime d'écoulement WVF à  $Ta=120$ , auquel on a superposé un écoulement axial pour un nombre de Reynolds axial  $Re_{ax}=80$ . La cartographie de ces champs de vitesse est représentée sur la figure (5.42).

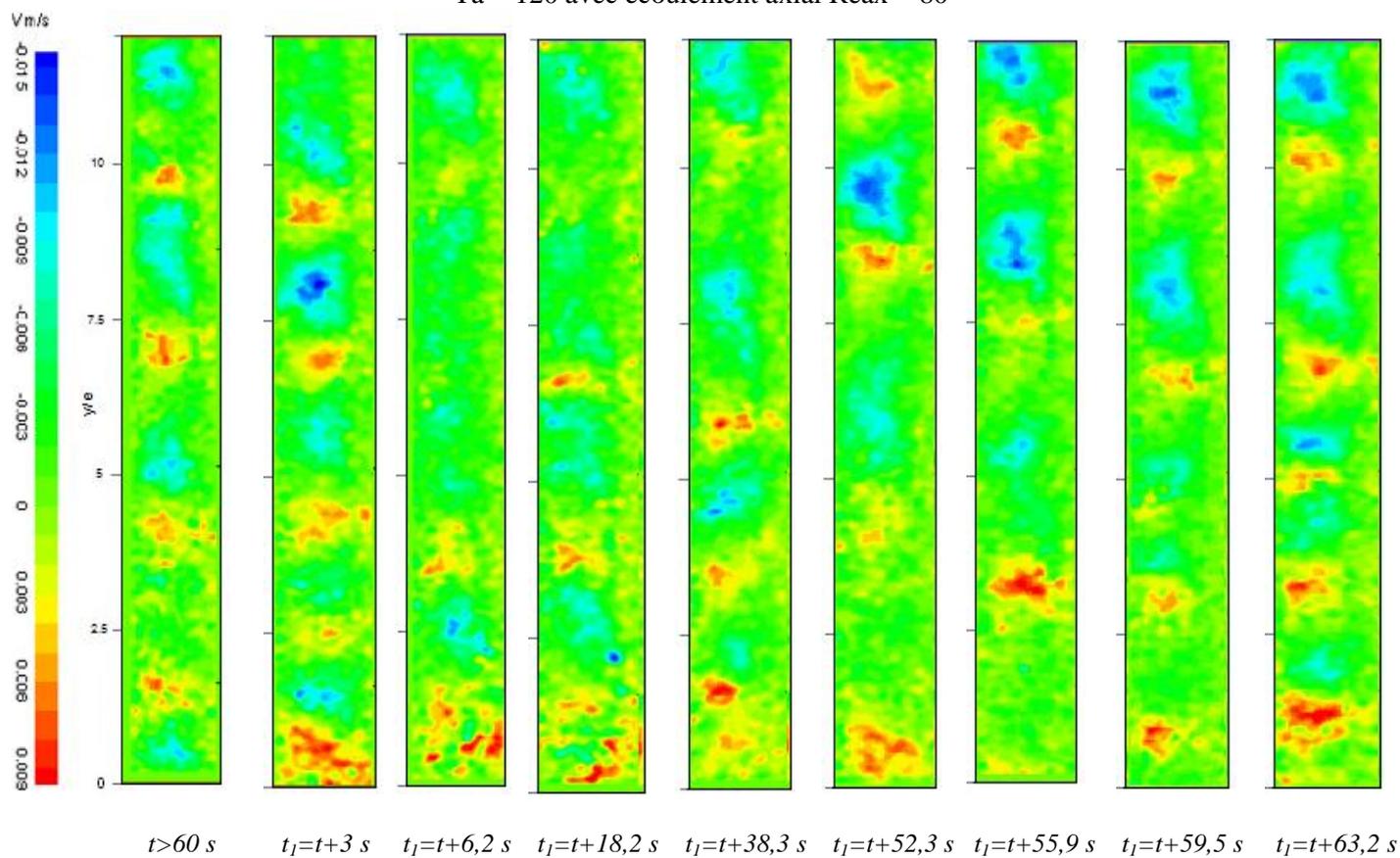
Nous présentons également sur les figures (5.43) et (5.44), les évolutions spatio-temporelles des iso-valeurs des composantes axiale et radiale de la vitesse ( $U$  et  $V$ ). La première figure (5.43) représente les contours de la composante axiale de vitesse pour un régime d'écoulement WVF établi où  $Ta=120$  et sans écoulement axial. Par la suite, les captures suivantes illustrent l'effet de la superposition d'un écoulement axial ( $Re_{ax}=80$ ) sur l'évolution du comportement des composantes de vitesse en fonction du temps. L'écoulement passe alors dans un premier lieu par une étape de désordre avant de suivre, par la suite, la direction ascendante axiale. Toutefois, les composantes de vitesses gardent leurs caractères oscillant le long de l'entrefer entre les deux cylindres coaxiaux. Les figures (5.45) et (5.46) présentent l'évolution des iso-contours de la vorticité du critère  $\Gamma_2$ .



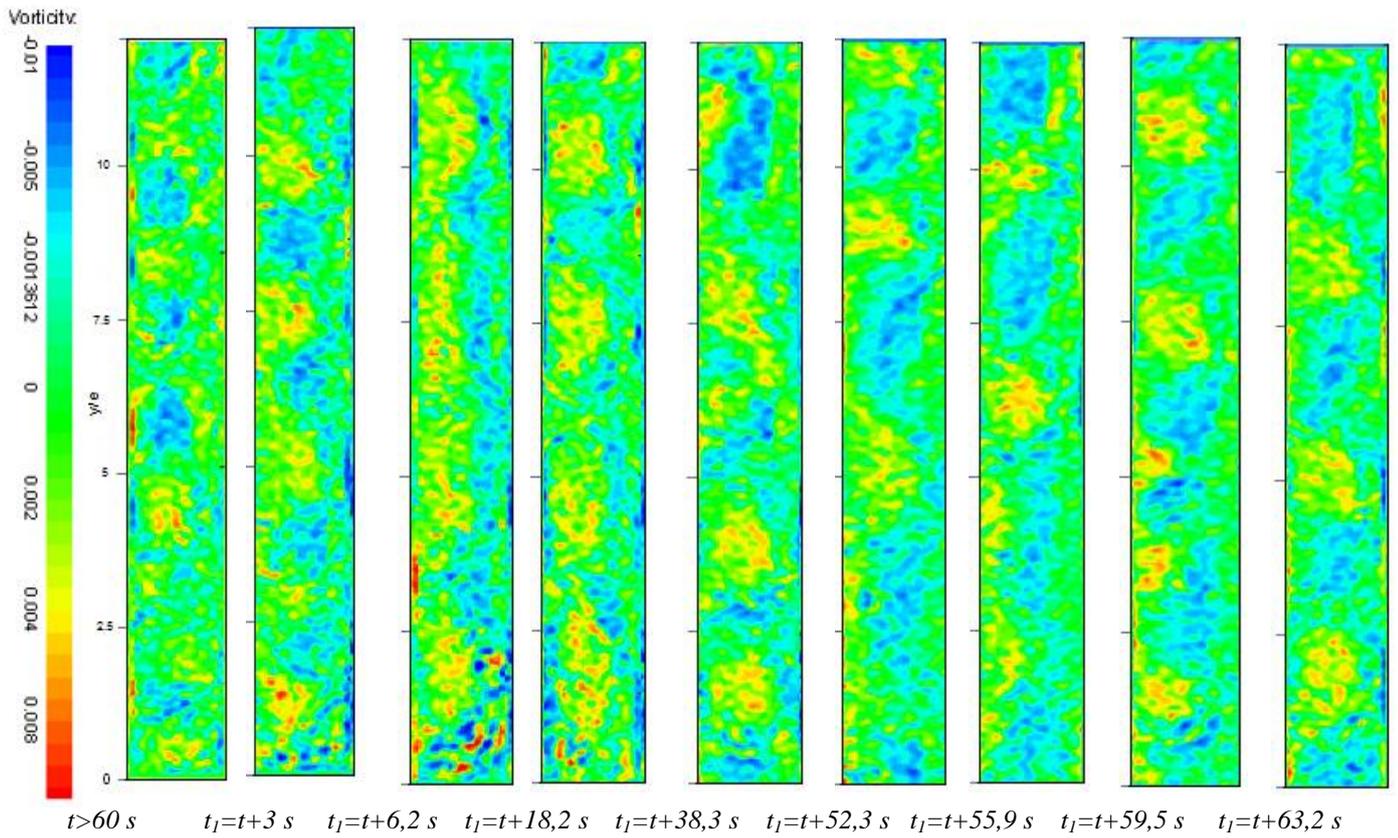
**Figure 5.42** : Champ de vitesse instantané issu des mesures par PIV à  $Ta=120$  avec écoulement axial (superposé aux contours de vorticité)



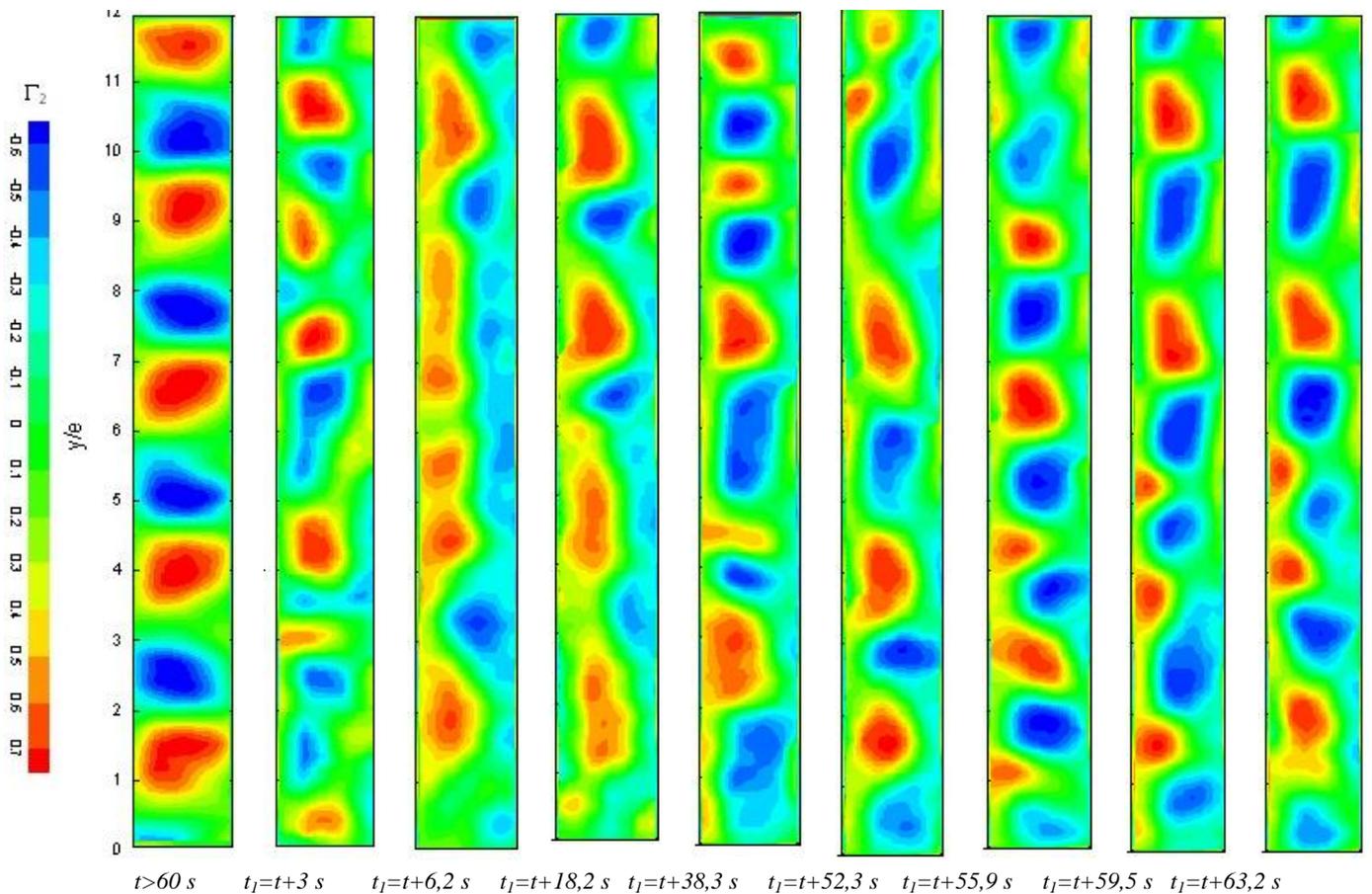
**Figure 5.43 :** Evolution spatio-temporelle des iso-contours de la composante radiale de vitesse ( $U$ ) à  $Ta = 120$  avec écoulement axial  $Re_{ax} = 80$



**Figure 5.44 :** Évolution spatio-temporelle des iso-contours de la composante radiale de vitesse ( $V$ ) à  $Ta = 120$  avec écoulement axial  $Re_{ax}=80$



**Figure 5.45** : Évolution spatio-temporelle des iso-contours de Vorticité  $\omega$  à  $Ta=120$  avec écoulement axial  $Re_{ax}=80$



**Figure 5.46** : Évolution spatio-temporelle des iso-contours du critère  $\Gamma_2$  à  $Ta=120$  avec écoulement axial  $Re_{ax}=80$

Les post-traitements des différents champs de vitesse instantanés acquis par PIV en utilisant les critères de vorticité  $\omega$  et le critère  $\Gamma_2$  fait apparaître nettement les instabilités et fournit ainsi une description du comportement de ces vortex en mouvement dans l'entrefer. Le déclenchement du débit axial superposé à l'écoulement de Couette-Taylor développé en régime WVF crée au départ un certain mélange dans l'écoulement, dissociant ainsi les tubes de Taylor. Pendant cet intervalle de temps (entre 4 et 10 seconde environ à partir du déclenchement du débit axial), l'écoulement résultant est désorganisé et le débit axial prédomine alors l'effet centrifuge. En revanche, au bout d'une durée de 10 s du déclenchement du débit axial, des instabilités contrarotatives commencent à reparaitre le long de l'entrefer, marquant ainsi une nouvelle prédominance de l'effet centrifuge pour ce type d'écoulement. Par ailleurs, les nouvelles instabilités générées se déplacent dans l'entrefer selon la direction ascendante de l'écoulement axial. Cependant, leur longueur d'onde ( $\lambda/e \approx 2,6$ ) n'est pas affectée par le débit superposé à l'écoulement de Couette-Taylor.

La partie qui suit sera consacrée à l'étude des instabilités au niveau de la zone proche de la paroi fixe où les sondes électrochimiques sont implantées. Ainsi, deux techniques expérimentales seront utilisées et synchronisées dans le temps.

### **5.3.3 Mesures synchronisées par PIV et par polarographie dans le dispositif de Couette-Taylor**

Nous nous intéressons dans cette partie à l'étude de l'écoulement de Couette-Taylor au moyen de sondes électrochimiques affleurant la paroi interne du cylindre externe fixe de la veine d'essai.

Les réponses des sondes électrochimiques sont ainsi relevées et analysées selon le type de l'écoulement imposé dans l'entrefer du dispositif de Couette-Taylor. Les résultats obtenus sont par la suite comparés aux mesures effectuées simultanément par PIV (synchronisation des deux de techniques de mesures employées). Cette synchronisation PIV-électrochimie permet dans un premier temps de mener une analyse statistique des grandeurs mesurées, et dans une seconde étape de comparer les évolutions temporelles des variables obtenues expérimentalement dans des mêmes conditions opératoires. L'origine et la fin des temps d'acquisitions seront ainsi les mêmes à la fois pour les mesures obtenues par PIV et celles obtenues par électrochimie.

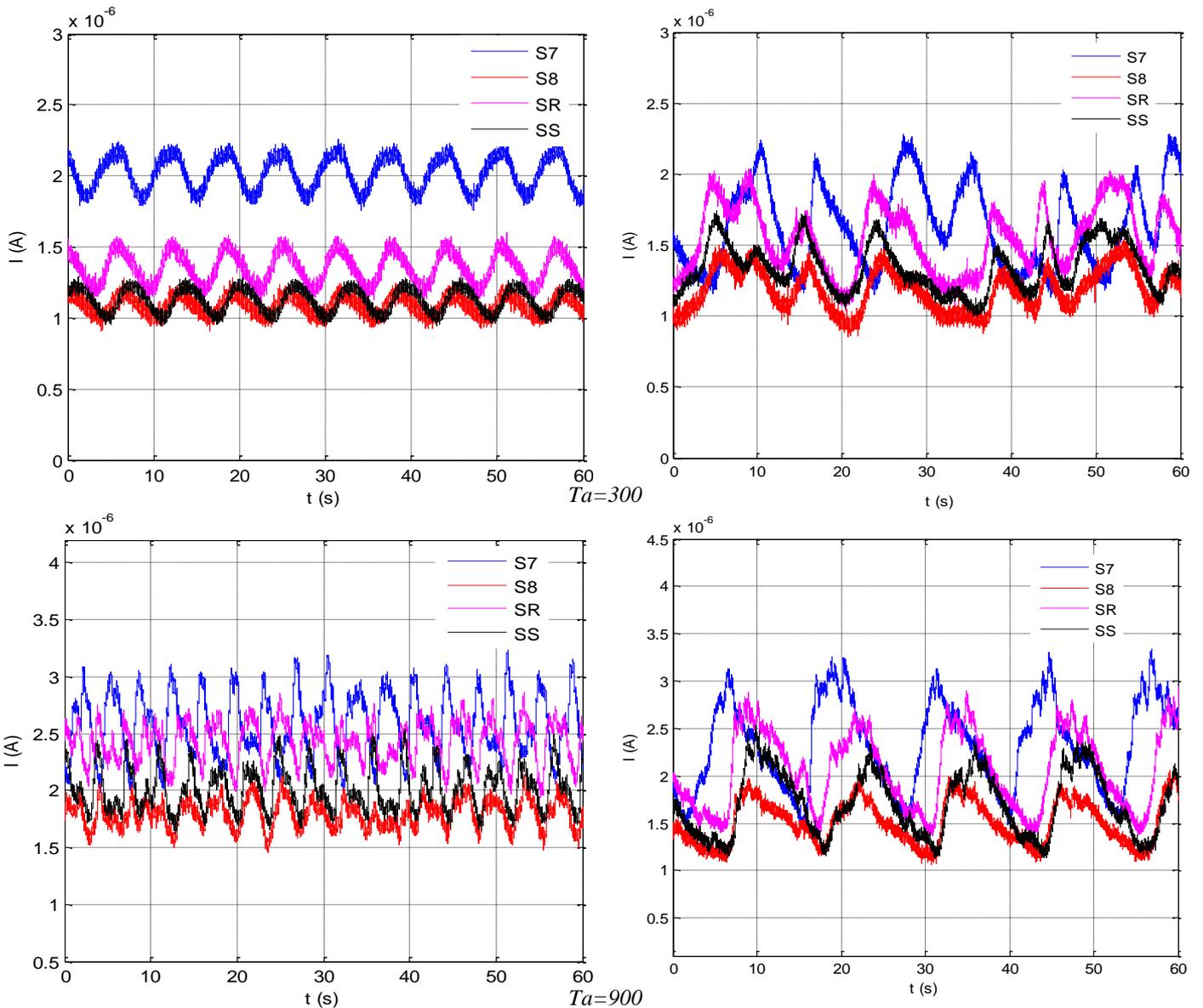
#### **5.3.3.1 Mesures électrochimiques**

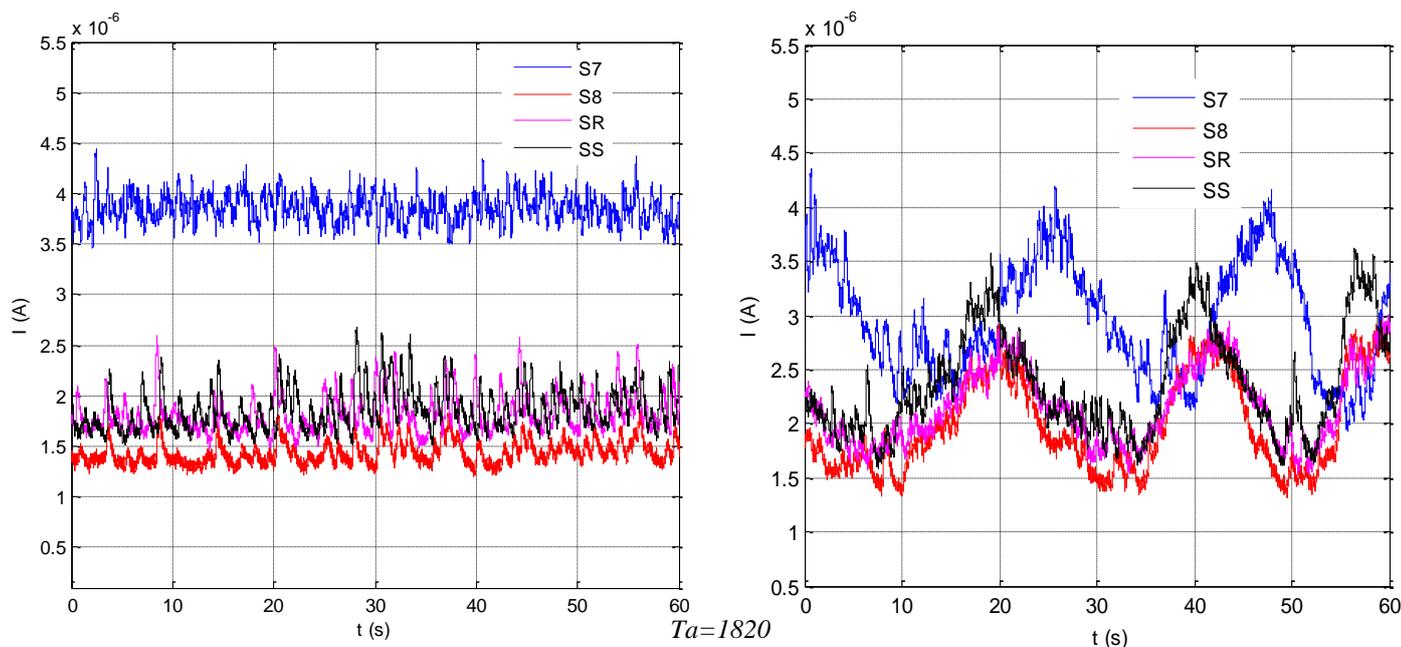
Un exemple de réponse en courant limite de diffusion des sondes électrochimiques placées sur les lignes verticale et horizontale du dispositif de Couette-Taylor ( $\eta=0,855$ ) est représenté sur la figure (5.47) pour des régimes d'instabilités différents.

Les résultats de mesures sont donc obtenus pour une fréquence d'échantillonnage  $f_{ech}=1500 \text{ Hz}$  sur une durée totale d'acquisition de 76 secondes ; soit un nombre totale d'échantillons égal à 114480.

Les signaux recueillis de la sonde triple (tri-segmentée) située à une hauteur  $z=H/2$  du dispositif de Couette-Taylor seront aussi traités dans cette partie.

Les résultats ainsi obtenus présentent les réponses temporelles pour trois régimes d'écoulement différents : le régime WVF, le régime MWVF, et le régime turbulent. Pour chaque régime d'écoulement, un débit axial a été imposé dans le but de la détermination de son effet sur le transfert de masse pariétal.





**Figure 5.47** Courants limites de diffusion délivrés par les différentes sondes électrochimiques :  
 A gauche : sans écoulement axial ; A droite : avec écoulement axial où  $Re_{ax}=63$

Ainsi, on peut remarquer que les signaux issus des différentes sondes électrochimiques circulaires pour le régime WVf où  $Ta \approx 300$ , sont périodiques. Ces derniers sont en conséquence caractérisés par une fréquence fondamentale unique  $f_s$  qui représente la fréquence de passage des tourbillons. Cette fréquence fondamentale est obtenue grâce aux spectres fréquentiels de ces signaux.

En imposant un écoulement axial caractérisé par un nombre de Reynolds axial  $Re_{ax}=63$ , le signal garde son caractère ondulatoire. Cependant, il perd légèrement sa périodicité.

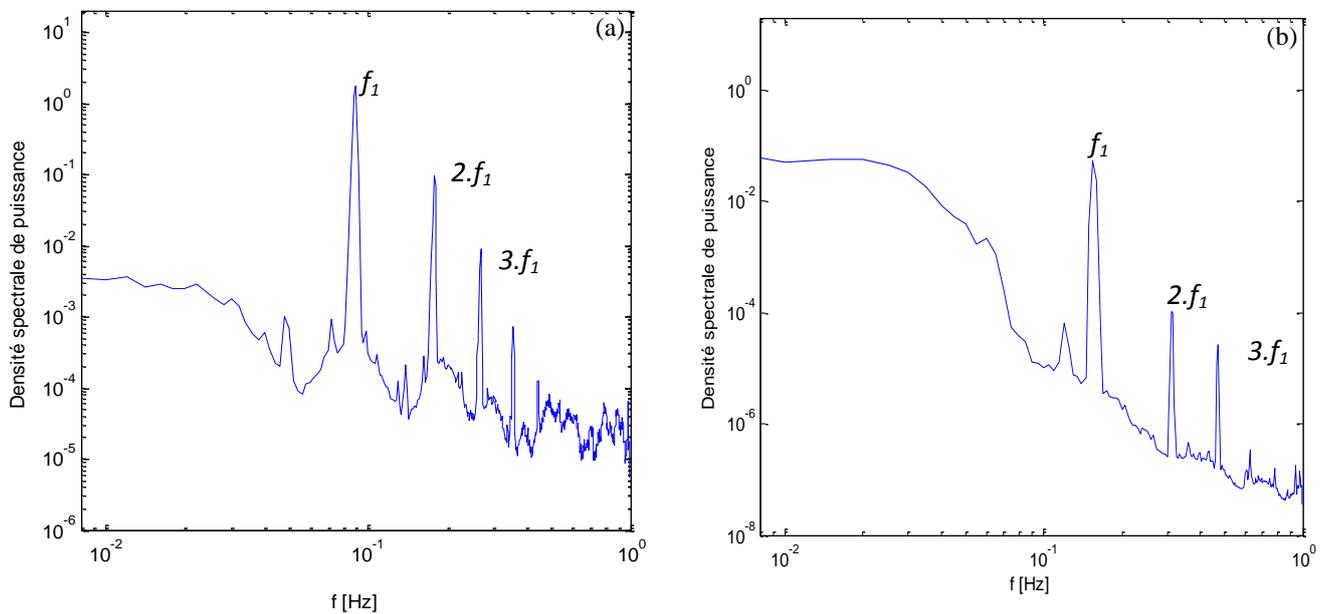
Pour une vitesse de rotation plus importante du cylindre intérieur et un régime MWVf de l'écoulement  $Ta \approx 900$ , les signaux présentent des formes sinusoïdales répétitives caractérisées par deux sinusoïdes voisines d'amplitudes doublées (repliements des signaux). Par ailleurs, les périodes sont plus faibles par rapport à celle du signal correspondant au régime WVf. La superposition d'un écoulement axial ( $Re_{ax}=63$ ) a entraîné une augmentation de la période du signal et une suppression du phénomène du repliement du signal. Ceci peut s'interpréter par l'effet stabilisant exercé par cet écoulement axial malgré la prédominance de l'effet centrifuge entraînant la régénération des instabilités dans l'entrefer.

Pour des vitesses de rotation plus importantes ( $Ta \approx 1820$ ), les signaux issus des sondes polarographiques (traduisant le transfert de masse) ne restent plus sinusoïdaux. Cependant, la superposition de l'écoulement de Couette-Taylor avec l'écoulement axial entraîne l'ondulation du signal et la réapparition des sinusoïdes.

Afin de caractériser ces régimes d'écoulement, nous présentons les spectres de fréquences de ces signaux électrochimiques, permettant de déterminer la fréquence fondamentale des instabilités pour le régime d'écoulement considéré.

Les figures (5.48-49) présentent les spectres fréquentiels obtenus pour trois nombres de Taylor distincts :  $Ta=120$ ,  $Ta=300$  et  $Ta=900$ . Ces derniers sont caractéristiques des régimes WVF et MWVF de l'écoulement de Couette-Taylor. Les deux premiers spectres (figures 5.48-a et 5.48-b) correspondant au régime WVF (1<sup>ère</sup> et deuxième plage), présentent un pic principal bien distingué et relatif à la fréquence caractéristique  $f$  du régime d'écoulement. Le premier pic du spectre pour lequel  $Ta=120$  (Fig 5.48-a), est relevé à une fréquence  $f_1=0,09$  Hz. Les trois pics suivants correspondent à des harmoniques de la fréquence fondamentale telles que  $f_2=2 f_1=0,18$  Hz et  $f_3=3 f_1=0,27$  Hz.

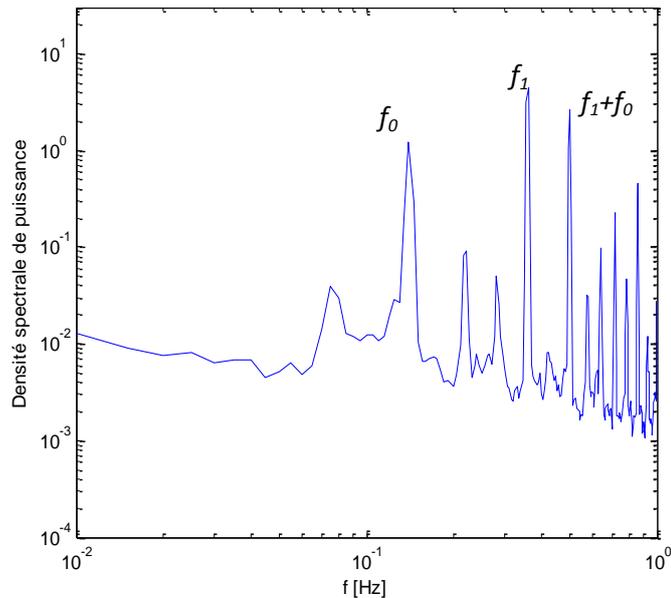
Pour le cas de l'écoulement de Couette-Taylor correspondant à la deuxième plage du régime WVF ( $Ta=300$ ), on peut constater l'existence d'un pic principal bien visible qui est relatif à une fréquence fondamentale  $f_1=0,148$  Hz.



**Figure 5.48** : Spectre fréquentiel caractéristique du régime WVF (a) première plage pour  $Ta=120$  ;  
b) 2<sup>ème</sup> plage pour  $Ta=300$

En augmentant la vitesse de rotation du cylindre intérieur au-delà du régime WVF, l'écoulement atteint le régime MWVF. Ce régime se caractérise, selon les visualisations obtenues grâce aux particules de kallioscope, par une dissymétrie dans le train d'onde azimutale. Initialement parfaitement régulier, ce régime présente une variation périodique suivie d'une modulation d'amplitude de la vague azimutale (Takeda et al., 1993).

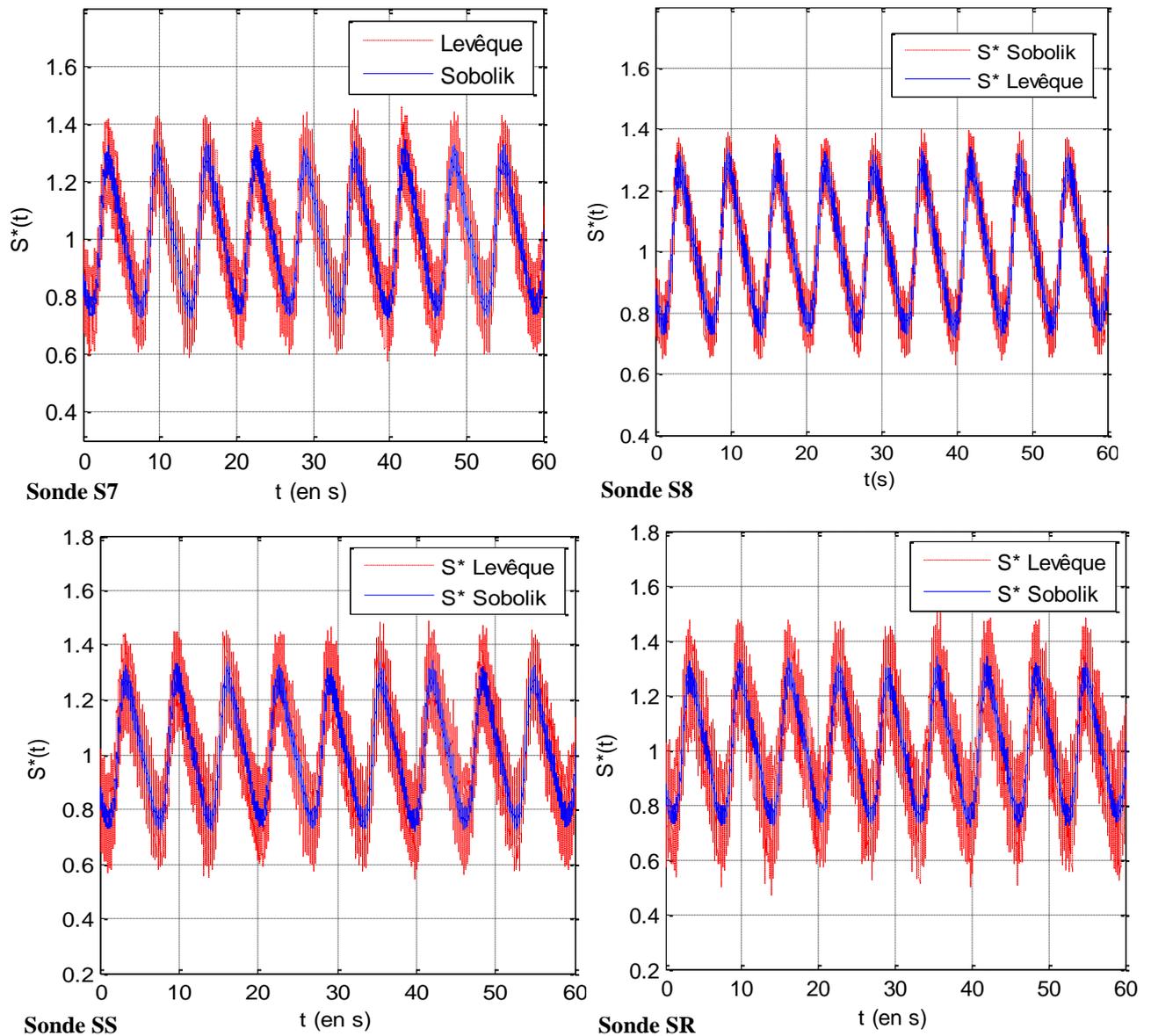
La figure (5.49) illustre un spectre représentatif du régime MWVF ( $Ta=900$ ), caractérisé par l'apparition d'une nouvelle fréquence  $f_0=0,14$  Hz en plus de la fréquence principale  $f_1=0,36$  Hz. Les harmoniques de cette nouvelle fréquence, ainsi que des combinaisons linéaires des deux fréquences  $f_0$  et  $f_1$ , sont également observées.



**Figure 5.49** : Spectre fréquentiel caractéristique du régime MWVF  $Ta=900$

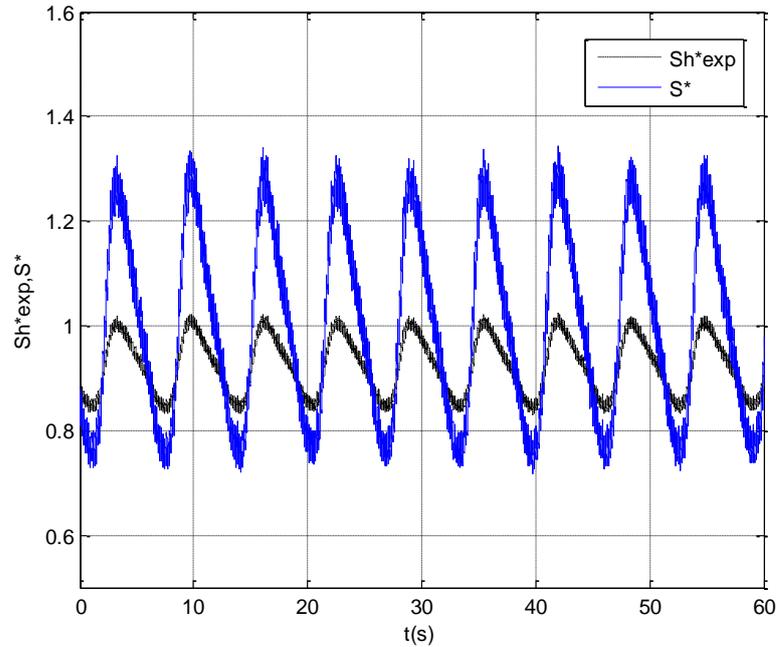
### 5.3.3.2 Détermination du gradient pariétal de vitesse à partir des mesures électrochimiques

Nous proposons dans cette partie du chapitre, l'application des méthodes de détermination du gradient pariétal de vitesse sur le dispositif de Couette-Taylor pour différents nombres de Taylor. Pour tester la validité des différentes approches existantes de détermination du gradient pariétal de vitesse à partir du transfert de masse mesuré (en l'occurrence la méthode de Levêque et celle de Sobolik et al., 1987), il est nécessaire que l'écoulement soit en régime quasi-permanent (presque sans perturbations). Compte-tenu des sondes électrochimiques utilisées, qui sont de forme circulaire, nous avons utilisé l'approximation qui consiste à remplacer une sonde circulaire de diamètre  $d_i$  (où  $1 \leq i \leq 18$ ) par une sonde rectangulaire de largeur équivalente  $l_{si}=0,82.d_i$ . Cette expression, est par la suite injectée dans les expressions de Levêque et de Sobolik et al. (1987), qui sont utilisées pour remonter au gradient pariétal de vitesse. Les résultats de calcul de ce dernier pour un nombre de Taylor  $Ta=300$  et pour les différentes sondes polarographiques, sont donnés à titre d'exemple pour les sondes référencées 7, 8, S et R, sur figure (5.50) ci-dessous. Celle-ci, représentant une comparaison de l'évolution temporelle du gradient pariétal de vitesse adimensionnel (par celui moyen), montre que les résultats obtenus par les deux méthodes (Levêque et Sobolik et al., 1987) ne présentent qu'une très légère différence qui reste inférieure à 0,8%.



**Figure 5.50** Exemple d'évolution temporelle du gradient pariétal de vitesse déterminé à partir des méthodes de Levêque et de Sobolik et al. (1987) pour  $Ta=300$

L'évolution du nombre de Sherwood expérimental et du gradient pariétal de vitesse, obtenu selon la méthode de Levêque en fonction du temps, est illustrée par la figure (5.51). On remarque que les deux signaux sont tout à fait en phase, car la détermination du gradient par cette technique ne fait intervenir ni l'atténuation du signal de transfert de masse ni son déphasage. La méthode de Sobolik et al. (1987), qui interagit sur la correction de ces deux paramètres, permet en effet de bien remédier à ce problème tant que les amplitudes de fluctuations du signal "gradient pariétal de vitesse" restent inférieures ou égales à 100% de sa moyenne.



**Figure 5.51** : Évolution du gradient pariétal de vitesse et du nombre de Sherwood correspondant en fonction du temps pour  $Ta=300$

La partie suivante est consacrée à la présentation de la réponse électrochimique d'une sonde triple placée à une hauteur  $z=H/2$  au niveau du cylindre fixe du dispositif de Couette-Taylor.

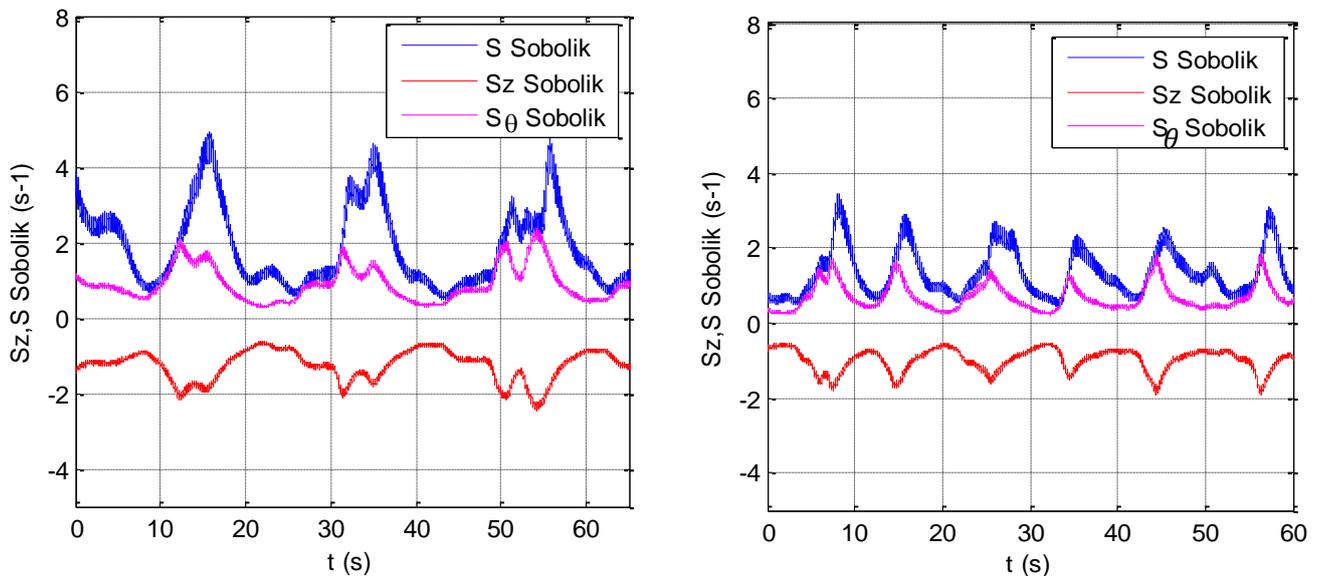
### 5.3.3.3 Réponse d'une sonde électrochimique triple ou tri-segmentée

La réponse d'une sonde électrochimique triple peut fournir des données fondamentales sur la cinématique de l'écoulement dans la zone en proche paroi. En effet, Sobolik (1999) a montré que à partir des courants recueillis par la sonde tri-segmentée que le gradient pariétal de vitesse ainsi que la direction de l'écoulement peuvent ainsi être déterminés. La symétrie axiale des vortex stationnaires conduit alors à une périodicité des composantes de vitesse en fonction de l'angle  $\theta$  (Sobolik, 1999).

Afin de déterminer les composantes azimutale  $\gamma_\theta=S_\theta$  et axiale  $\gamma_z=S_z$  du gradient pariétal de vitesse, nous utilisons les réponses (courant limite de diffusion mesurés) issues de cette sonde triple en exploitant ses caractéristiques directionnelles. Pour cela, nous considérons que la composante de la vitesse axiale reste indépendante de la direction radiale ( $z$  ou  $r$ ), soit la  $v_r$  négligeable (Wein et Sobolik, 1989).

L'approche de Sobolik et al. (1987) a été alors utilisée dans cette étude pour le calcul des différents gradients pariétaux de vitesse et leurs composantes également.

Les réponses directionnelles issues des trois segments de la sonde triple sont illustrées par la figure (5.52) pour un nombre de Taylor  $Ta=300$  avec un écoulement axial pour 2 débits différents  $Re_{ax}=63$ ,  $Re_{ax}=120$ .



**Figure 5.52** : Évolutions temporelles des composantes axiale et azimutale du gradient pariétal de vitesse ainsi que celui du module, déterminé par la méthode de Sobolik et al. (1987) à  $Ta=300$  en utilisant une sonde triple : A gauche :  $Re_{ax}=63$  ; A droite :  $Re_{ax}=120$

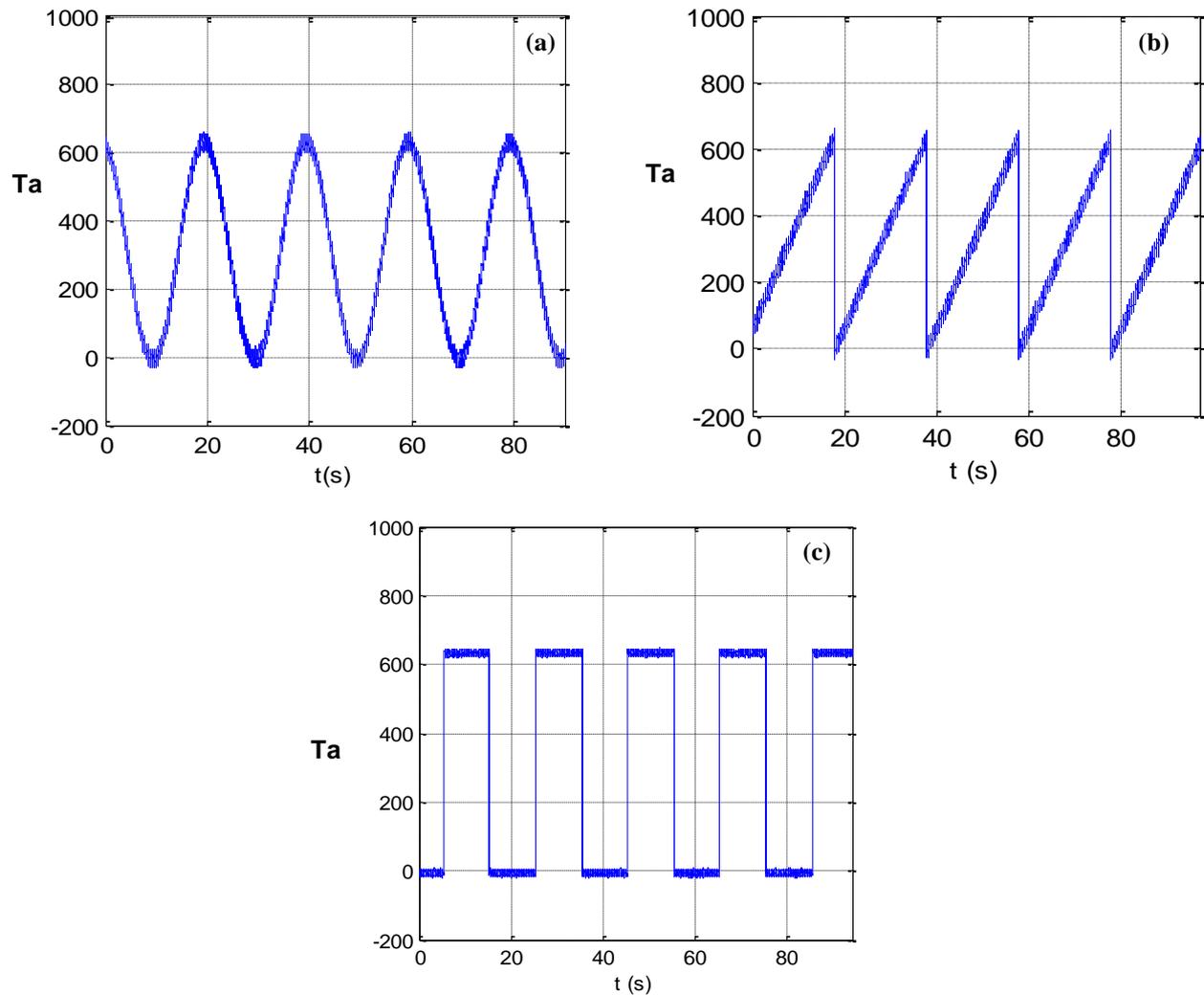
En l'absence d'écoulement axial, le caractère sinusoïdal organisé se déstabilise (cas des réponses des sondes simples circulaires). Toutefois, l'évolution des composantes des gradients pariétaux garde une allure périodique, vu l'oscillation des signaux de courants limites de diffusion obtenus (transfert de masse). En effet, une période d'évolution de la composante axiale du gradient pariétal de vitesse correspond au passage de l'instabilité dans la zone pariétale. L'évolution de la composante azimutale du gradient de vitesse se superpose au gradient pariétal de vitesse moyen. Ceci confirme les résultats expérimentaux obtenus par Wouahbi (2009).

Dance ce qui suit, nous exploitons l'effet d'une variation brusque sur la réponse de la sonde tri-segmentée et en conséquence sur le gradient pariétal de vitesse.

### 5.3.3.3.1 Effet d'une vitesse de rotation variable sur la réponse de la sonde triple

Dans cette partie, nous analysons l'effet de l'imposition d'une vitesse de rotation variable du cylindre mobile sur les réponses en transfert de masse sur la paroi interne du cylindre extérieur fixe. Ceci nous permet alors d'étudier le comportement des structures tourbillonnaires suite à une modification du mouvement de rotation du cylindre mobile. Ainsi, nous présentons ci-dessous trois types de mouvements que l'on impose à ce cylindre (figure 5.53). Le premier mouvement est sinusoïdal. sa période correspond à un passage du régime WVF vers un état de repos instantané (figure 5.53a). Le second mouvement correspond à une augmentation progressive de la vitesse du cylindre mobile sur une période. Ce mouvement est donc sous forme d'une série de rampes initialement au repos, puis passant à la deuxième plage du régime WVF ensuite revenant brusquement à un état de repos instantané (figure 5.53b). Le dernier mouvement est une série de variations brusques, sous forme d'un signal carré, initialement au régime WVF et passant

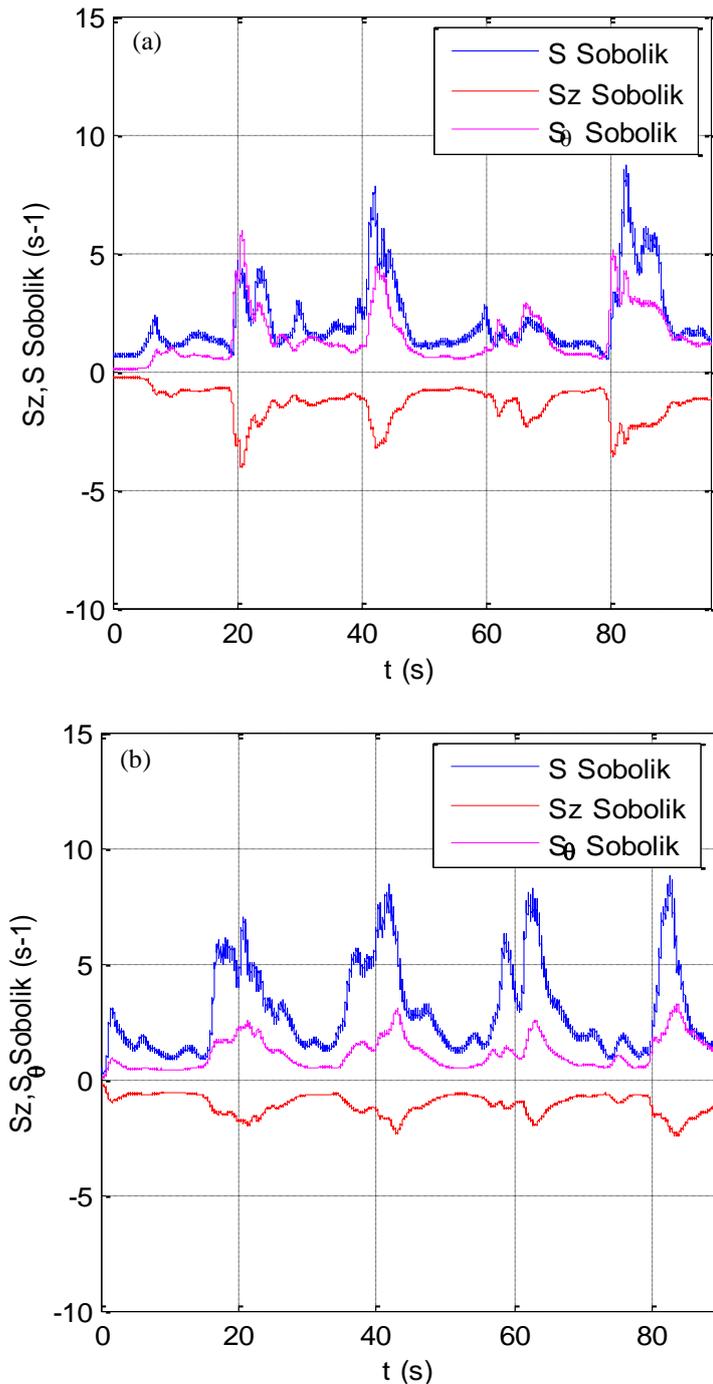
brutalement à un écoulement dont le nombre de Taylor augmente brutalement (figure 5.53c). Les résultats de mesures présentés dans cette section proviennent d'une synchronisation temporelle avec ceux instantanés obtenus par la technique de PIV.



**Figure 5.53** : Évolution temporelle (nombre de Taylor) du mouvement imposé au cylindre mobile : a) Mouvement sinusoïdal ; b) Mouvement sous forme d'une rampe ; c) Mouvement sous forme d'un signal carré

En considérant les deux premières configurations, l'écoulement dans l'entrefer du dispositif de Couette-Taylor, initialement au repos passe progressivement par le régime de l'écoulement de Couette (CF), puis par l'apparition de la première instabilité ensuite suivie de la seconde. Ces instabilités générées dans l'écoulement influent directement sur l'évolution du transfert de masse pariétal, et donc sur le gradient pariétal de vitesse.

L'évolution temporelle du transfert de masse obtenu au moyen de la réponse de la sonde triple pour les deux premières configurations étudiées est illustrée par les figures (5.54-a, et b).



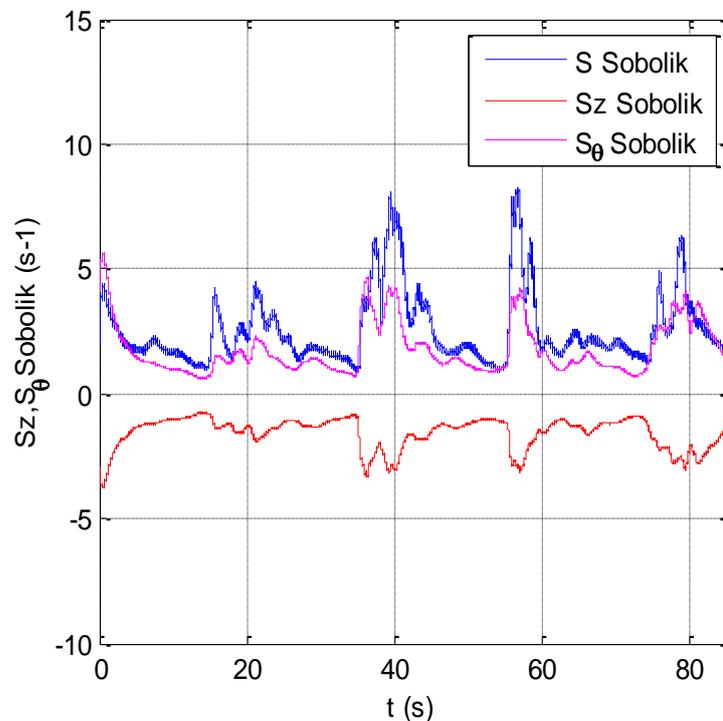
**Figure 5.54** : Évolutions temporelles des composantes et du module du gradient pariétal de vitesse, déterminés par la méthode de Sobolik et al. (1987) en utilisant la sonde triple :  
a) Mouvement sinusoïdal du cylindre mobile ; b) Mouvement sous forme d'une rampe du cylindre mobile

La réponse de la sonde triple à une variation oscillatoire du nombre de Taylor entraîne alors une évolution périodique du module du gradient pariétal de vitesse et de ses composantes, signalant ainsi l'apparition d'instabilités qui suivent la variation progressive du nombre de Taylor (figure 5.54a). Dans le cas de la seconde configuration étudiée et qui correspond à une rampe, on assiste alors à une accélération progressive de l'écoulement suivie d'une décélération brusque (figure 5.54b).

L'augmentation de la vitesse de rotation progressive entraîne la formation d'instabilités répétitives. Par ailleurs, la chute brutale de la vitesse de rotation imposée au cylindre mobile génère une chute du transfert de masse légèrement retardée. Ce phénomène est probablement dû à l'effet de l'inertie de la sonde qui retarde sa réponse à la décélération brusque.

L'effet d'une variation brusque du mouvement du cylindre mobile sur l'écoulement dans l'entrefer a été aussi étudié en imposant un signal carré à la rotation. L'écoulement passe alors brusquement de l'état de repos à une vitesse de l'écoulement qui correspond à un nombre de Taylor d'environ  $Ta=600$  (figure 5.53-c), relatif à la deuxième plage d'instabilités du régime WVF. Cette variation brusque entraîne une succession d'instabilités et une transition des différents régimes d'écoulements.

L'évolution temporelle du transfert de masse déterminé à partir de la réponse en courant limite de diffusion de la sonde triple est illustrée par la figure (5.55).



**Figure 5.55 :** Évolution temporelle du module du gradient pariétal de vitesse et de ses composantes, déterminés par la méthode de Sobolik et al. (1987) en utilisant la sonde triple (variation brusque du nombre de Taylor)

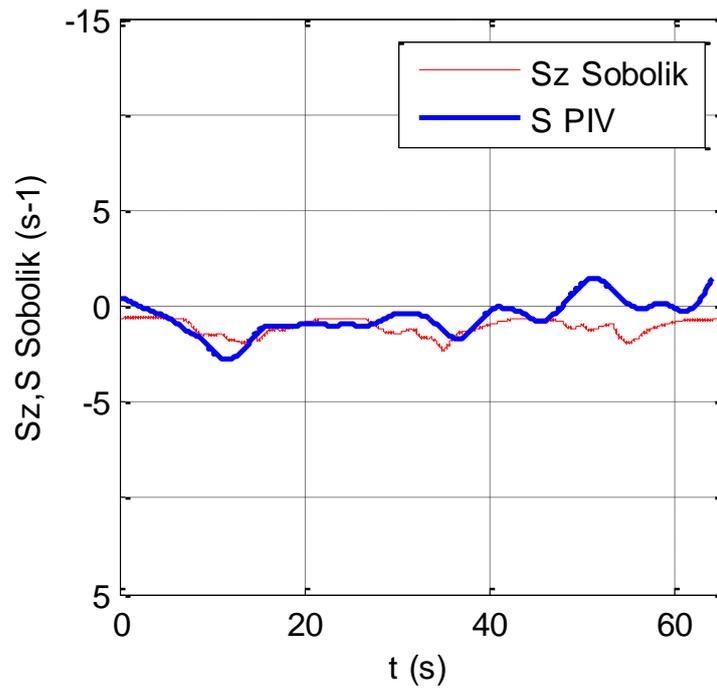
On peut alors constater que la transition rapide d'un régime d'écoulement vers un autre, entraîne une intensification rapide du transfert de masse et par conséquent du gradient pariétal de vitesse. Cette intensification est relative au développement des vortex de Taylor ondulés, caractérisant ainsi le régime WVF. L'augmentation de l'onde azimutale entraîne des fluctuations du gradient pariétal de vitesse déterminé par la méthode de Sobolik et al. (1987). Cependant, ce gradient garde

une évolution temporelle assez comparable à celle issue du mouvement brusque imposé au cylindre mobile.

#### **5.3.3.4 Comparaison entre le gradient pariétal obtenu à partir des mesures par PIV et celui issu des mesures électrochimiques**

Afin de pouvoir comparer le gradient pariétal de vitesse issu des deux techniques de mesures (PIV et polarographie), nous avons utilisé le protocole opératoire de synchronisation des acquisitions PIV-polarographie qui a été déjà décrit au chapitre "*Matériel et méthodes*". Les mesures obtenues par PIV et réalisées sur le plan  $(r,z)$  dans une zone très voisine de la sonde triple, nous ont permis de déterminer la composante axiale du gradient pariétal de vitesse et de la comparer à celle déterminée par polarographie en utilisant cette même sonde tri-segmentée. Les mesures par la PIV (1500 champs instantanés acquis à une fréquence d'échantillonnage de 15 Hz, soit sur une durée d'acquisition de 100 secondes) ont été synchronisés avec celles obtenues par polarographie. L'effet d'une variation progressive de type rampe est donc étudié dans ce cas d'exemple.

L'évolution de la composante axiale du gradient pariétal de vitesse déterminé à partir des mesures par PIV présente des fluctuations qui correspondent au passage des ondes azimutales. En effet, ces ondes se manifestent par les oscillations qui se superposent au gradient pariétal de vitesse. Une fois les ondes azimutales sont filtrées, nous obtenons l'évolution réelle du gradient pariétal. La comparaison des deux évolutions (figure 5.58) de la composante axiale du gradient pariétal de vitesse obtenue par les deux méthodes (PIV et sonde triple), présente la même allure caractéristique de l'évolution des instabilités dans le même endroit au voisinage de la sonde. Les valeurs minimales et maximales des deux évolutions sont quasiment les mêmes, et les deux signaux sont aussi quasiment en phase. Par ailleurs, on peut constater un petit écart d'environ 25,6% entre les amplitudes des deux évolutions. Ceci pourrait s'expliquer par fait que des erreurs de mesures soient commises et qui sont dues essentiellement à l'incapacité de la technique optique (PIV) de mesurer la vitesse très près de la paroi.



**Figure 5.56 :** Évolution temporelle de la composante axiale du gradient pariétal de vitesse déterminé par la méthode de Sobolik et al. (1987) comparé à celui obtenu par PIV (synchronisation PIV- électrochimie)

Pour conclure, l'utilisation de la méthode électrochimique permet d'obtenir l'empreinte d'une instabilité (ou d'une structure tourbillonnaire) sur la paroi lors de son passage, grâce à la détermination des composantes du gradient pariétal de vitesse (s'il s'agit d'une sonde triple). La technique de PIV représente un moyen performant pour l'étude de la dynamique des écoulements tourbillonnaires et la détermination des gradients pariétaux de vitesse à travers l'extraction des données de vitesse près de la paroi. Cependant, cette technique reste inappropriée pour des mesures très près de la paroi. Dans notre cas d'étude, le point le plus proche de la paroi est placé à une distance d'environ  $0,1 \text{ mm}$  ; soit à environ  $0,006.e$ . En conséquence, la comparaison effectuée sur les évolutions temporelles des composantes du gradient pariétal de vitesse déterminées par les deux techniques. Cette méthode issue de la PIV pourrait être largement améliorée si on passe à des caméras de très haute résolution (plus de  $10 \text{ MPixels}$ ). Toutefois, la synchronisation des mesures PIV-polarographie reste une technique très utile, puisqu'elle permet de lier les deux techniques qui sont complémentaires : déterminer et caractériser la dynamique d'un vortex et son évolution spatio-temporelle au moyen de la PIV et analyser son impact lors de son passage au voisinage de la paroi au moyen de la polarographie.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, deux types d'écoulements tourbillonnaires ont été étudiés : un écoulement autour d'un obstacle carré et un écoulement de Couette-Taylor. Ces deux types d'écoulement sont caractérisés par leurs richesses en instabilités.

En utilisant la méthode de PIV, nous avons pu établir la cartographie de la dynamique de l'écoulement autour d'un obstacle et ainsi que les différents régimes obtenus en faisant varier le nombre de Reynolds. Les mesures des champs de vitesse obtenus nous ont permis de valider les résultats obtenus par simulation numérique utilisant la méthode de la LBM.

La deuxième partie de ce chapitre a été consacrée à l'étude expérimentale de l'écoulement de Couette-Taylor.

Dans cet objectif, trois techniques expérimentales ont été mises en place et utilisées : la visualisation par des particules kalliroscope de l'écoulement dans l'entrefer, la PIV et la polarographie en utilisant des sondes simples et multi-segmentées.

L'utilisation de la technique de la visualisation à l'aide des particules réfléchissantes de Kalliroscope nous a permis d'effectuer une caractérisation qualitative de l'écoulement de Couette-Taylor. Nous avons ainsi pu observer grâce à une coupe laser dans le plan azimutale  $(r,z)$  au niveau de l'entrefer entre les cylindres coaxiaux du dispositif expérimental, la génération de cellules de Taylor ainsi que leur comportement vis-à-vis de la superposition d'un écoulement axial.

Par la suite, nous avons utilisé la méthode de PIV afin de pouvoir caractériser quantitativement l'écoulement de Couette-Taylor ainsi que les différents régimes d'écoulement. Pour cela nous avons utilisé des critères de détection tourbillonnaires afin de localiser la position des cellules de Taylor. La dernière partie de notre étude nous a permis de mettre en évidence l'interaction entre le vortex et la paroi par l'utilisation des sondes polarographiques simples et tri-segmentées et la détermination du gradient pariétal de vitesse. La synchronisation entre la technique de PIV et la technique polarographique a permis de suivre l'évolution des instabilités tout en déterminant simultanément leurs empreintes sur la paroi.



## Conclusion générale

Durant ce travail, qui est à la fois numérique et expérimental, nous nous sommes intéressés à d'une part, à la mise en place d'un outil numériques basés sur la méthode de Boltzmann sur réseau, et d'autre part, à l'étude numérique et expérimentale des écoulements tourbillonnaires. Un code de simulation numérique a été développé, en langage Fortran 90, a été pour la simulation des écoulements et des transferts de de masse a été alors développé.

Ce code a été validé par comparaison des résultats de la simulation numérique avec ceux obtenus expérimentalement et analytiquement. Ce code LBM ainsi développé, a permis de fournir une base de données des champs de vitesse de l'écoulement autour d'un obstacle. Les résultats ainsi obtenus, nous ont permis d'une part de classer les différents régimes de l'écoulement derrière l'obstacle en milieu confiné selon le nombre de Reynolds, et d'autre part de caractériser les structures tourbillonnaires cohérentes générées au niveau du sillage en se servant d'algorithmes de post-traitements spécifiques, que nous avons développés sous Matlab® pour le calcul des critères de détection des tourbillons.

Nous avons ainsi caractérisé les détachements tourbillonnaires au niveau du sillage, en termes de taille, de nombre et de fréquence de détachement, grâce au calcul du nombre de Strouhal déterminé à partir d'une analyse spectrale des champs instantanés de vitesse derrière l'obstacle. Nous avons constaté un effet stabilisant dû à la présence des parois de confinement limitant l'écoulement et entraînant une atténuation de l'intensité des instabilités dans le sillage.

Deux géométries différentes d'obstacles ont été adoptées lors de la simulation bidimensionnelle : un obstacle de forme carrée et un autre de forme circulaire. L'objectif est de déterminer l'effet de la forme de l'obstacle sur le comportement du sillage en termes de régimes d'écoulements et de génération des structures tourbillonnaires.

L'étude de l'écoulement tridimensionnel autour d'un obstacle nous a permis de déterminer les effets de la présence des parois latérales sur l'évolution des instabilités dans le canal. Le rapprochement des parois latérales par la diminution de la largeur du canal entraîne la stabilisation du sillage.

Une deuxième partie du travail de simulation numérique a consisté à l'élaboration d'un second code de calcul, toujours par la méthode LBM, dont l'objectif est la simulation du transfert de masse au niveau d'une sonde localisée à la paroi inférieure du canal.

La simulation numérique est réalisée en considérant une concentration nulle à la surface de la sonde implantée sur la paroi inerte en contact avec l'écoulement. Le code de calcul ainsi développé, nous a permis de calculer l'évolution instantanée de la concentration de l'ion actif de la solution polarographique à la surface de la sonde, et d'estimer ainsi le taux de transfert de masse correspondant. La sonde est placée sur la paroi inférieure du canal en aval dans le sillage de l'obstacle, afin d'analyser l'effet des instabilités générés par ce dernier sur l'évolution du taux du transfert massique à la paroi.

La dernière partie de ce travail est une investigation expérimentale des écoulements tourbillonnaires dont le but est de caractériser le comportement hydrodynamique des structures tourbillonnaires générés. Deux dispositifs expérimentaux, ont été utilisés : Un canal hydraulique dans lequel un obstacle de section carrée est placé et un système de Couette-Taylor.

Le dispositif du canal hydraulique nous a permis d'atteindre deux objectifs. Le premier objectif est la validation expérimentale des codes de calcul LBM élaborés pour la simulation de l'écoulement et des transferts autour d'un obstacle. Le deuxième objectif est l'analyse des différents régimes d'écoulement ainsi que les différentes instabilités générées en utilisant la technique de PIV.

Différentes techniques expérimentales ont été utilisées afin de caractériser l'écoulement de Couette-Taylor avec ou sans débit axial. Nous avons tout d'abord entamé une étude qualitative de l'écoulement par la visualisation de l'écoulement à l'aide de particules de kalliroscope éclairées par une nappe Laser. Les résultats obtenus nous ont permis d'observer l'évolution spatio-temporelle des cellules de Taylor en fonction de la vitesse de rotation du cylindre interne (cylindre mobile du dispositif). Nous avons étudié l'effet de la superposition d'un écoulement axial à l'écoulement de Couette-Taylor sur les structures tourbillonnaires. Deux configurations ont été, alors, utilisées. La première consiste à superposer un écoulement axial à un écoulement de Taylor déjà existant Ce mode opératoire est dit direct. Le mode inverse consiste à déclencher la rotation du cylindre interne du dispositif après que l'écoulement axial soit pleinement développé.

Les résultats ainsi obtenus nous ont permis de conclure qu'un écoulement axial superposé à l'écoulement de Couette-Taylor, entraîne la stabilisation de l'écoulement. L'effet de l'écoulement axial se manifeste soit par un retard de l'apparition des instabilités, le déplacement des vortex dans la direction de l'écoulement ou la déformation des cellules de Taylor formant ainsi des hélicoïdes ondulées. Les résultats obtenus sont en accord avec ceux de Lueptow et al. (1992) et de Berrich (2011).

Par la suite, une étude quantitative a été réalisée. Celle-ci est basée sur les acquisitions par la PIV des champs de vitesse instantanés. Nous avons ainsi présenté l'évolution spatio-temporelle de ces champs dans l'entrefer entre les cylindres coaxiaux pour un écoulement avec et sans débit axial et aussi pour les deux modes direct et inverse. Un post-traitement nous a permis de détecter et de caractériser les tourbillons.

Les mesures obtenues par PIV au cours de ce travail ont été synchronisées à celles obtenues par polarographie afin de relier la réponse pariétale des microélectrodes avec la dynamique de l'écoulement tourbillonnaire dans l'entrefer du dispositif de Couette-Taylor. Ceci nous a permis alors, de caractériser l'interaction vortex-paroi tout en déterminant l'évolution des instabilités.

Deux types de sondes (affleurant la paroi et en contact avec la solution polarographique) ont été utilisées. Des sondes simples circulaires et une sonde tri-segmentée ; ce qui nous a permis de déterminer les différentes composantes du gradient pariétal de vitesse. Les gradients pariétaux ont été déterminés à l'aide d'un algorithme développé sous Matlab et utilisant la méthode de Lévêque (1928), et celle de Sobolik et al. (1987). L'effet de la nature du mouvement imposé au cylindre intérieur mobile a été ainsi considéré, afin de mettre en évidence son impact sur le gradient pariétal de vitesse.

En fin, et au terme de ce travail, nous proposons quelques perspectives :

1- Le code de calcul mis en place pour la simulation numérique d'un écoulement autour d'un obstacle en 2D et 3D pourrait être adapté et amélioré pour la simulation d'un écoulement de Couette Taylor.

2- Il serait intéressant de paralléliser le code.

3- Il serait intéressant de modifier le type de paroi du dispositif de Couette-Taylor en utilisant, par un exemple, un revêtement poreux au niveau de l'une des parois (cylindre mobile par exemple). Ceci permettrait de mieux comprendre l'effet d'un écoulement tangentiel sur les structures tourbillonnaires.

4- Il serait intéressant d'étudier un écoulement diphasique dans l'entrefer du dispositif de Couette-Taylor.



## Références bibliographiques

- Abbassi H., Turki S., Ben Nasrallah S.**, “Numerical investigation of forced convection in a plane channel with a built-in triangular prism”, *Int. J. Therm. Sci.*,40, 649–658, (2001).
- Abcha N., Latrache N., Dumouchel F., Mutabazi I.**, “Qualitative relation between reflected light intensity by kalliroscope flakes and velocity field in the Couette-Taylor flow system”. *Exp. in Fluids* 45, 85–94, (2008).
- Ackerberg R. C., Patel R. D., Gupta S. K.**, “The heat/mass transfer to a finite strip at small Peclet numbers”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 86, 49 -65, (1978)
- Ahydin M., Leutheusser, H. J.**, “Novel experimental facility for the study of plane Couette flow”. *Rev. Sci. Instrum.* Vol.50, 1362–1366, (1979).
- Aidun C. K., Clausen J. R.**, “Lattice-Boltzmann method for complex flows”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol.42, 439–472, (2010).
- Aït-Mouheb N.**, "Étude de l'interaction entre parois et structures tourbillonnaires générées par un obstacle carré placé dans un milieu confiné", Rapport de Master 2 Recherche, Université de Nantes, (2006).
- Alapati S., Kang S., Suh Y.K.**, “3D Lattice Boltzmann Simulation of Droplet Formation in a Cross-Junction Microchannel”, *Proceeding of the 3rd IASME/WSEAS*, (2008).
- Alexander F.J., Chen S., Sterling J.D.**, “Lattice Boltzmann thermohydrodynamics”. *Phys. Rev.* Vol.E 47, R2249–R2252. (1992).
- Aloui F.**, “Étude des écoulements monophasiques et diphasiques dans les élargissements brusques axisymétriques et bidimensionnelles”. Thèse de Doctorat, Inst. National Polytech. de Lorraine, Nancy, (1994).
- Ambari A., Deslouis C., Tribollet B.**, “Frequency response of mass transfer rate in a modulated flow at electrochemical probes”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 29, 35-45, (1986).
- Andereck C.D., Liu S. S., Swinney H.L.**, “Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders”. *J. Fluid Mech.* Vol.164, 155-183.(1986).
- Barkley D., Tuckerman L. S., Golubitsky M.**, “Bifurcation theory for three-dimensional flow in the wake of a circular cylinder”, *Phys. Rev.* Vol.E 61, 5247-5252 (2000).
- Barkley D., Henderson R. D.**, “Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder”. *J. Fluid Mech.* Vol.322, 215-241. (1996).
- Beck J. V., Blackwell B., St-Clair C. R.**, “Inverse Heat Conduction”, Wiley, New York, (1985)
- Berrich E.**, “Analyse expérimentale des interactions écoulement - paroi par PIV et polarographie en utilisant des sondes multi-segmentées : Application à un rhéomètre plan-plan et un système de Couette-Taylor», Thèse de doctorat, Université de Nantes, Faculté des sciences et des techniques,(2011).
- Berrich E., Aloui F., Legrand J.**, “Experimental validation and critical analysis of inverse method in mass transfer using electrochemical sensor”, *Experimental Thermal and Fluid Science* 44,253–263, (2013).
- Bhatnagar P., Gross E., Krook M.**, “A model for collision process in gases. I. Small amplitude process in charged and neutral one-component systems”. *Phys. Rev.* Vol.94(3), 511525,(1954).
- Boghosian B.M., Taylor W.**, "Correlations and Renormalization in Lattice Gases." *Phys. Rev. E* 52 (1995) 510-554.
- Boghosian B.M., Yopez J., Wagner A., Coveney P.V.**, "Entropie Lattice Boltzmann Models," *Proc. Roy. Soc. Lon. A* (2001) 457, 717-766.
- Bouabdallah A.**, “Instabilités et Turbulence dans l'écoulement de Taylor-Couette”, Thèse de doctorat en Sciences Physiques, INPL, Nancy, France (1980).
- Boubnov B.M., Gledzer E.B., Hopfinger E.J.**, "Stratified circular Couette flow: instability and flow regimes”, *J. Fluid Mech.* Vol.292, 333-358, (1995).
- Bouzidi M., Firdaouss M., Lallemand P.**, “Momentum transfer of a Boltzmann-lattice fluid with boundaries”. *Physics of Fluids*, Vol. 13 (11), 3452–3459, (2001).
- Burkhalter J. E., Koschmieder E. L.**, “Steady supercritical Taylor vortex flow”. *J. Fluid Mech.*, Vol.58 part 3, 547-560, (1973).
- Camarri S., Giannetti F.**, “Effect of confinement on three-dimensional stability in the wake of a circular cylinder”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.642, 477–487, (2010).
- Carte G.**, “ Simulation d'écoulements instationnaires à dominante périodique. Application aux sillages laminaires et turbulents”, Thèse de Doctorat, Université d'Aix- Marseille II, (1994).
- Chen J.H., Pritchard, W. G., Tavener S.J.**, “Bifurcation for flow past a cylinder between parallel planes”, *Journal of Fluid Mechanics* 284, N°5, 23-41, (1995).
- Chen S., Doolen G.D.**, “Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows”. *Annu. Rev. Fluid Mech.* Vol.30, 329–364, (1998).
- Chen S., Martinez D., Mei R.**, "On boundary conditions in lattice Boltzmann methods," *Physics of Fluids*, Vol. 8, 2527-2536, (1996).

- Chen S., Chen H., Martnez D., Matthaeus W.**, “Lattice Boltzmann model for simulation of magneto-hydrodynamics”. *Physical Review Letters*, Vol. 67, 3776–3779, (1991).
- Clausen J. R., Jr D. A.R., Aidun C. K.**, “Parallel performance of a lattice-Boltzmann/finite element cellular blood flow solver on the IBM Blue Gene/P architecture”, *Computer Physics Communications*, Vol. 181 (6), 1013-1020, (2010).
- Cognet G.**, “Contribution à l’étude de l’écoulement de Taylor-Couette par la méthode polarographique”, Doctorat des Sciences, Université de Nancy, (1968).
- Cognet G.**, “Les étapes vers la turbulence dans l’écoulement de Couette-Taylor entre cylindres coaxiaux », *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Numéro spécial, 7-44, (1984).
- Coles D.**, “Transition in circular Couette flow” , *J. Fluid Mech.* Vol.21, 385, (1965).
- Cole J.A.**, “Taylor-vortex instability and annulus-length effects”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 75, 1-15 (1976).
- Coney J. E. R., ATKINSON J.**, “ The effect of Taylor vortex flow on the radial forces in an annulus having variable eccentricity and axial flow”. *Trans. ASME: J. Fluids Engng*, Vol.100, 210–214. (1978).
- Czarny O.**, “Contribution à l’étude numérique des écoulements en rotation avec parois : application au système de Taylor-Couette”, Thèse de doctorat, Aix-Marseille II, (2003).
- Dauchot O., Daviaud F.**, “Finite-Amplitude perturbation in plane Couette flow”. *Europhysics Letters*, Vol. 28, 225–230,(1994).
- Davis R. W., Moore E. F., Purtell L. P.** , “A numerical-experimental study of confined flow around rectangular cylinders”. *Physics of Fluids*, 27:46–59, (1984).
- Deliyang Y., Shehata A., Modi V., West A.C.**, “Mass transfer to a channel wall downstream of a cylinder”, *IntJ. Heat Mass Trans.*,Vol.40,4263-427, (1997).
- Deslouis C., Gil O. and Tribollet B.**, “Frequency response of electrochemical sensors to hydrodynamic fluctuations”, *J. Fluid Mech.*, 215, 85-100, (1989).
- Deslouis C., Gil O., Tribollet B.**, “Frequency response of electrochemical sensors in a coneand- plate modulated flow”, *Int J. Heat Mass trans.*, 2525-2532, (1990).
- Deslouis C., Huet F., Gil O., Tribollet B.**, “Spectral analysis of wall turbulence with a bicircular electrochemical probe”, *Experiments in Fluids*, 16, 97-104, (1993).
- Dhouaieb M. S.**, "Écoulement derrière un cylindre en milieu confiné : Caractérisation expérimentale par la PIV de la dynamique des structures tourbillonnaires cohérentes", Mastère Recherche, ENIM, Université de Monastir, (2006).
- Dhouaieb M. S., Aloui F., Turki S., Ben Nasrallah S.**, "Étude expérimentale et numérique des écoulements instationnaires derrière un barreau carré placé dans un milieu confiné", 1ère Conférence Internationale sur La Conversion et La maîtrise de L’Energie, CICME’08, Sousse-Tunisie, (2008).
- D’Humières D., Ginzburg I., Krafczyk M., Lallemand P., Luo L.**,” Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions”. *Phil. Trans.* Vol.360, 437-451(2002).
- D’Humières D., Lallemand P., Frisch U.**, “Lattice gas models for 3D hydrodynamics”. *Europhys. Letter* , Vol.2(4) 291\_297,(1986).
- Donnelly R.J., Simon N.J.**, “An empirical torque relation for supercritical flow between rotating cylinders”. *J. Fluid Mech.* Vol.7, 401-418. (1960).
- Dorfman J.R., Cohen E.G.D.**, “Velocity-Correlation Functions in Two and Three Dimensions: Low Density”, *Phys. Rev.* Vol. A 6, 776-790 (1972).
- Dumaine J.Y.**, “Etude numérique de la réponse en fréquence des sondes électrochimiques”, *Letter In Heat and Mass Trans.*, 293-302, (1981).
- Eloy C.**, « Instabilité multipolaire de tourbillons ». thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, (2000).
- Fasel H., Booz O.**, “Numerical investigation of supercritical Taylor-vortex flow for a wide gap. *J. Fluid Mech.* Vol.138, 21-52. (1984).
- Fenstermacher P.R., Swinney H.L., Gollub J. P.**,”Dynamical instabilities and the transition to chaotic Taylor vortex flow”, *J. Fluid Mech.*,Vol. 94-part 1, 103-128. (1979).
- Filippova O., Hanel D.**, “Grid refinement for lattice-BGK models”. *Journal of Computational Physics*, Vol. 147(1), 219 – 228, (1998).
- Flekkøy E.G.**, “Lattice Bathnagar-Gross-Krook models for miscible fluids”, *Physical Revue*, Vol.E47(6), 4247-4257,(1993).
- Fortuna G., Hanratty T. J.**, “Frequency response of the boundary layer on wall transfer probes”, *Int. J. of Heat Mass Trans.*, 14, 1449-1507, (1971).
- Funfshilling P.**, “ Investigation par un écoulement de Couette de la réponse fréquentielle des sondes électrochimiques et de la floculation de particules en suspension”, Thèse de Doctorat, INPL, Nancy, France, (2001).

- Gauthier G., Gondret G., Rabaud M.**, “Motions of anisotropic particules : Application to visualization of three-dimensional flows”. *Phys. Fluids*, Vol.10(9), 2147–2154, (1998).
- Gerrard J.H.**, “The wakes of cylindrical bluff bodies at low Reynolds number”. *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A* 288, 351, (1978).
- Goldstein S.** “The stability of viscous fluid flow between rotating cylinders”. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 33, 41-61, (1937).
- Ginzburg I.**, “Generic boundary conditions for Lattice Boltzmann models and their application to advection and anisotropic-dispersion equations”. *Adv. Water Resour.* Vol.28 1196–1216,(2005).
- Ginzburg I., D’Humières D., Kuzmin A.**, “Optimal Stability of Advection-Diffusion Lattice Boltzmann Models with Two Relaxation Times for Positive/Negative Equilibrium“, *Journal of Statistical Physics*, Vol. 139(6), 1090-1143, (2010).
- Goldstein S.**, “The stability of viscous fluid flow between rotating cylinders”. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol.33, 41–61. (1937).
- Graftieaux L., Michard M., Grosjean N.**, “Combining PIV, POD and vortex identification algorithms for the study of unsteady turbulent swirling flows”, *Measurement Science and technology*, Vol.12, 1422-1429,(2001).
- Griffith M. D., Leontini J., Thompson M.C., Hourigan K.**, “Three dimensional stability in the wake of a confined circular cylinder, with transverse oscillation”. *Proceedings of the IUTAM Symposium on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations (BBVIV-6)*, Capri,Italy, (2010).
- Guerrouache M.S.**, “Étude numérique de l’instabilité de Bénard-Karman derrière un cylindre fixe ou en mouvement périodique. Dynamique de l’écoulement et advection chaotique. ”, Thèse de doctorat , Ecole Polytechnique de l’Université de Nantes, (2000).
- Guo Z., Zheng C., Shi B.**, "An extrapolation method for boundary conditions in lattice Boltzmann method," *Physics of Fluids*, vol. 14, pp. 2007-10, (2002).
- Guy R., McNamara, Zanetti G.**, “Use of the Boltzmann Equation to Simulate Lattice-Gas Automata”, *Phys. Rev. Lett.* Vol.61, 2332 (1988).
- Hama F.R.**, “Three-dimensional vortex pattern behind a circular cylinder”, *J. Aeronaut. Sci.* 24, 156 ,(1957)
- Hanratty T.J., Campbell J.A.**, “Measurements of wall shear stress”, *Fluid Mech. Measurements* (Ed. R.J. Goldstein), 559–615, (1983).
- He X., Luo L.-S.** “A priori derivation of the lattice Boltzmann equation”, *Phys. Rev.* Vol. E 55, 6333-6336. (1997),
- He X., Luo L.-S.** “Some progress in lattice Boltzmann method. 1. Non uniform mesh grids”. *J. Comput. Phys.* Vol.129, 357-363, (1996).
- He X., Zou Q., Luo L.-S., Dembo M.**, "Analytic solutions of simple flows and analysis of nonslip boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model," *Journal of Statistical Physics*, vol. 87, 115-136, (1997).
- Henderson R. D.**,” Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition”. *J. Fluid Mech.* Vol.352, 65-112,(1997)
- Hua B.L., Le Gentil S., Orlandi P.**, “Premières transitions de flux de Couette circulaire avec stratification axiale“, *Phys. Fluids*, Vol. 9, 365, (1997).
- Hunratty T. J.**, « Use of the polarographic method to measure wall shear stress”, *Journal of Applied Electrochemistry*, 1038-1046 (1991).
- Hunt J.C.R., Wray A., Moin P.**, “Eddies, Stream and convergence zones in Turbulent flows”, *Center for Turbulence research, Proceedings of the Summer Program*, 193-208, (1988).
- Hucho W.H., Sovran G.**, “Aerodynamics of road vehicles”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol.25, 485–537, (1993).
- Inamuro T., Yoshino M., Ogino F.**, “A Non-slip Boundary Condition for Lattice Boltzmann Simulation”, *Physics of Fluids*, Vol.7, 2928-2930, (1995).
- Jain P. K.**, “Simulation of two-phase dynamics using lattice Boltzmann method (LBM) », PhD Philosophy in Nuclear Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, (2010).
- Jeong J., Hussain F.**, “On the Identification of a vortex”. *Journal of fluid Mechanics*, Vol.285, 69-94. (1995).
- Junk M., Yang Z. X.**, "Convergence of lattice Boltzmann methods for Navier-Stokes flows in periodic and bounded domains," *Numerische Mathematik*, vol. 112, 65-87, (2009).
- Kaiping P.**, “Unsteady forced convective heat transfer from a hot film in non-reversing and reversing flow”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 26, 545-557, (1983)
- Kao P.-H., Yang R.-J.**, “An investigation into curved and moving boundary treatments in the lattice Boltzmann method”, *Journal of Computational Physics*, Vol.227(11), 5671 – 5690,(2008).
- Kiehem P., Mitra N.K., Feibig M.**, “Numerical investigation of 2D and 3D confined wakes behind a circular cylinder in a channel”, *AIAA 24th Aerospace Science Meeting*, (1986).
- Kiya M., Takeo H., Mochizuki O., Simulating D.**, “Vortex pairs interacting with mixing-layer vortices”, *Fluid Dynamics Research*, Vol. 24 (2), 61-79,(1999).

- Knauss D.T., John J.E.A., Marks C.H.**, “Vortex frequencies of Bluff cylinders at low Reynolds numbers”, *J. Hydronaut.* Vol.10,121-6, (1976).
- Kristiawana M., Jirout T., Sobolik V.**, “Components of wall shear rate in wavy Taylor–Couette flow”, *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 35,1304–1312, (2011).
- Latt J.**, “Hydrodynamic limit of lattice Boltzmann equations”, PhD thesis, University of Genève,(2007).
- Latt J., Chopard B., Malaspinas O., Deville M., Michler A.**, ”Straight velocity boundaries in the lattice Boltzmann method”, *Phys. Rev.*Vol. E 77, 056703, (2008).
- Lebouche M.**, ”Contribution à l’étude des mouvements turbulents par la méthode polarographique”. These de doctorat en sciences, Nancy I, Nancy, (1968).
- Lei C., Cheng L., Kavanagh K.**, ”Re-examination of the effect of a plane boundary on force and vortex shedding of a circular cylinder”, *Journal of Wind Engineering and industrial Aerodynamics*, Vol.80, (1999).
- Lundbladh A., Johansson A.V.**, “Direct simulation of turbulent spots in plane Couette flow”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 229, 499–516, (1991).
- Marcus P.S.**, “Simulation of Taylor-Couette flow. Part 1. Numerical methods and comparison with experiment *J. Fluid Mech.* 146, 45-64, (1984).
- Martha A., Gallivan D., Noble R., John G.G., Richard O.B.**, “Test of the Possible Application of the Half-Way Bounce-Back Boundary Condition for Lattice Boltzmann Methods in Complex Geometry”,*Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.25, 249, (1997).
- Matisse P., Gorman M.**, “Neutrally buoyant anisotropic particles for flow visualization”. *Phys. Fluids*, Vol.27, 759–760, (1984).
- Mehel A.**, “Étude expérimentale d’un écoulement diphasique de Couette-Taylor”, Thèse de doctorat, Université de Nantes, Ecole Centrale de Nantes, (2006).
- Mei R., Luo L.-S., Shyy W.**, “An accurate curved boundary treatment in the lattice Boltzmann method”, *Journal of Computational Physics*, Vol.155(2), 307 – 330, (1999).
- Mitchell J.E., Hanratty T. J.**, “A study of turbulence at a wall using an electrochemical wallstress meter”, *J. Fluid Mech.*, 199-221, (1966).
- Mukhopadhyay A., Biswas, G., Sundararajan T.** , “Numerical investigation of confined wakes behind a square cylinder in a channel”, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol.14, 1473–1484, (1992).
- Mullin T., Blohm C.**, “Bifurcation phenomena in a Taylor – Couette flow with asymmetric boundary conditions”, *Phys. Fluids*, Vol. 13, 51-66 (2001).
- Nakoryakov V. E., Budukov A.P., Kashinsky O.N., Geshev P. I.**, “Electrodiffusion method of investigation into local structures of turbulent flows”, Ed. Gasenko V. G., Novosibirsk, (1986)
- Nernst. W.**, “Theorie der Reaktionsgeschwindigkeit in heterogenen Systemen”, *Z. phys. Chem.*, Vol.47(1),52-55, (1904).
- Nishimura T., Kojima N.**, “Mass transfer enhancement in a symmetric sinusoidal wavy-walled channel for pulsatile flow”, *International Journal of heat and mass transfer*, Vol.38, 1719-1731, (1995).
- Okajima A.**, “Strouhal numbers of rectangular cylinders”, *J. Fluid Mech.* Vol.123,379-398,(1982).
- Okajima A., Donglai Y., Atsushi S., Tomohito N.**, “Numerical study of blockage effects on aerodynamic characteristics of an oscillating rectangular cylinder”, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 67&68, 91-102. (1997).
- Paranthoën P., Browne L.W.B., Le Masson S., Dumouchel F., Lecordier J.C.**, “Characteristics of the near wake of a cylinder at low Reynolds numbers”, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, Vol.18, 659-674, (1999).
- Park T.-S.**, “Effects of an inserted square cylinder on wall heat transfer in laminar channel flows”, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol.27 (5), 1501-1508,(2013).
- Patil P., Tiwari Sh.**, “Effect of blockage ratio on wake transition for flow past a square cylinder”, *cylinder, Fluid Dynamics Research*, Vol.40, 753-778, (2008).
- Pohl T. K., Wilke M., Iglberger J.K., Rude U.**, “Optimization and profiling of the cache performance of parallel lattice Boltzmann codes”, *Parallel Processing Letters*, Vol.13(4),549–560,(2003).
- Py B.**, “ Etude tridimensionnelle de la sous couche visqueuse dans une veine rectangulaire par des mesures de transfert en paroi », *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.15, 129–144, (1973).
- Py B., Gosse J.**, "Sur la realization d’une sonde polarographique sensible à la vitesse et à la direction de l’écoulement", *C.R. Acad. Sc. Paris*, t., 401-405, (1969).
- Qian Y.H., DHumieres D., Lallemand P.**, "Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation," *Europhysics Letters*, Vol. 17, 479-484, (1992).

- Rehimi F.**, “Caractérisation expérimentale des structures tourbillonnaires derrière un cylindre en milieu confiné par la PIV et la polarographie », Thèse de doctorat, Université de Nantes, Ecole Centrale de Nantes, (2006).
- Rehimi F., Aloui F., Ben Nasrallah S., Doubriez L., Legrand J.**, “Experimental investigation of a confined flow downstream of a circular cylinder centred between two parallel walls”, *Journal of Fluids and structures*, Vol.24(6), 855-882, (2008).
- Reiss L.P., Hanratty T. J.**, “An experimental study of the unsteady nature of the viscous sublayer”, *A.I.Ch.E Journal*, 154-160, (1962).
- Robichaux J., Balachandar S., Vanka S. P.**, “Three-dimensional Floquet instability of the wake of a square cylinder”. *Physics of Fluids*, Vol. 11, 560-578. (1999).
- Romanov V.A.**, “Stability of plane Couette flow”. *Funkt. Anal. Appl.* Vol. 7, 137, (1973).
- Sahin M., Owens R.G.**, “A numerical investigation of wall effects up to high blockage ratios on two-dimensional flow past a confined circular cylinder”, *Physics of Fluids*, Vol.16, 1305-1320, (2004).
- Serre E., Sprague M.A., Lueptow R. M.**, “Stability of Taylor-Couette flow in a finite-length cavity with radial throughflow,” *Phys. Fluids*, Vol. 20, 034106, (2008).
- Sharify E.M., Saito H., Taikan H., Takahashi S., Arai N.**, “Experimental and Numerical Study of Blockage Effects on Flow Characteristics around a Square-Section Cylinder.”, (TUAT), Japan, (2011).
- Sharma A., Eswaran V.**, “Heat and fluid flow across a square cylinder in the two-dimensional laminar flow regime.”, *Num. Heat Transfer Part A*, Vol. 45 , 247–269, (2004).
- Shi B., Guo Z.**, “Lattice Boltzmann simulation for non linear convection-diffusion equations”, *Comput and Maths with appli.*, Vol.61, 3443-3452, (2011).
- Skordos P.A.**, “Initial and boundary conditions for the lattice Boltzmann method”, *Physical Review E*, Vol.48, 4823–4842, (1993).
- Snyder H.A.**, “Wave-number selection at finite amplitude in rotating Couette flow”. *J. Fluid Mech.*, Vol.35, part 2, 273-298, (1969).
- Sobolik V.**, “Electrochemical study of taylor–couette flow by limiting diffusion current method Collect”. *Czech. Chem. Commun.* Vol. 64, (1999).
- Sobolik V., Jirout T., Havlica J., Kristiawan M.**, “Wall Shear Rates in Taylor Vortex Flow”, *Journal of Applied Fluid Mechanics*, Vol. 4, No. 2, Issue 1, 25-31, (2011).
- Sobolik V., Wein O., Cermak J.**, “Simultaneous measurement of film thickness and wall shear stress in wavy flow of non-Newtonian liquids”, *Collection Czechoslovak Chem. Comun.*, Vol. 52, 913-928, (1987).
- Sohankar A., Norberg C., Davidson L.**, “Low-Reynolds-number flow around a square cylinder at incidence: Study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition”, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 26, 39–56, (1998).
- Souhar M.**, “Contribution à l'étude des écoulements diphasiques gaz-liquide en conduite verticale : cas des régimes à bulles et à poches”. Thèse de Doctorat ès-Sciences, Nancy, (1982).
- Spalart P.R.**, “Airplane training vortices”. *Annual Review of Fluid Mechanics.*, Vol. 30, 1998.
- Stobiac V.**, “Simulation of industrial viscous mixing flows with the lattice Boltzmann method” . (Ph.D.), Chemical Engineering, École Polytechnique de Montréal, (2013).
- Stobiac V., Tanguy P., Bertrand F.**, “Comparaison des différentes stratégies pour l'imposition des conditions aux limites en LBM”, *Computers and Fluids*, (2012).
- Strawn R., Kenwright C., Ahmad D.N.**, “Computer visualisation of vortex wake systems”, *AIAA Journal*, Vol.37:4, 511-512., (1999).
- Suh Y. K., Kang J., Kang S.**, "Assessment of algorithms for the no-slip boundary condition in the lattice Boltzmann equation of BGK model", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 58, 1353-1378, (2008).
- Tagg R.**, “The Couette-Taylor problem”, *Nonlinear Science Today*, Vol.4, 2-25 (1994).
- Taylor G.I.**, “Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders”. *Phil. Trans. Roy. Soc.* Vol.A.223, 289-343, (1923).
- Thomas D.G.**, “Forced convection mass transfer: part III. Increased mass transfer from a flat plate caused by the wake from cylinders located near the edge of the boundary layer”. *A.I.ch.e.Journal*, Vol.12, 124-130, (1966).
- Tillmark N., Alfredsson P.H.**, “Experiments on transition in plane Couette Flow”. *J. Fluid Mech.* Vol. 235, 89–102, (1992).
- Tournier C.**, “Étude de l'écoulement bidimensionnel instationnaire par tribométrie électrochimique”, Thèse de Doctorat ès sciences, Paris VI, (1976).
- Tournier C., Py B.**, “The behaviour of naturally oscillating three-dimensional flow around a cylinder”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 85 (1), 161-186, (1978).

- Takeda Y., Fischer W. E., Sakakibara J.**, “Measurement of energy spectral density of a flow in a rotating Couette system”, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 70, 3569, (1993).
- Turki S., Abbassi H., Ben Nasrallah S.**, “Effect of the blockage ratio on the flow in a channel with a built-in square cylinder”. *Computational Mechanics*, 33:22–29, (2003).
- Turki S., Abbassi H., Ben Nasrallah S.**, “Two-dimensional laminar fluid flow and heat transfer in a channel with a built-in heated square cylinder”. *International Journal of Thermal Sciences*, 42, 1105–1113, (2003).
- Van der Sman, R.G.M., Ernest, M.H.**, “Advection diffusion lattice Boltzmann scheme for irregular lattice”, *J. Comput. Phys.*, Vol. 160 (2), 766-782, (2000).
- Velivelli A.C., Bryden K.M.**, “A cache-efficient implementation of the lattice Boltzmann method for the two-dimensional diffusion equation”, *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, Vol. 16(14), 1415–1432, (2004).
- Vorotyntsev M.A., Martem'yanov S.A., Grafov B.M.**, “Temporal correlation of current pulsations at one or several electrodes: A technique to study hydrodynamic fluctuation characteristics of a turbulent flow”, *Original Research Journal of Electroanalytical Chemistry and Interfacial Electrochemistry*, Vol. 179, Issues 1–2, 1-23, (1984).
- Wan R.-Z., Fang H.-P.**, “Test of the Possible Application of the Half-Way Bounce-Back Boundary Condition for Lattice Boltzmann Methods in Complex Geometry”, *Commun. Theor. Phys. (Beijing, China)*, Vol. 35, 593–596, (2001).
- Wang X.K., Tan S.K.**, “Near-wake flow characteristics of a circular cylinder close to a wall”. *Journal of Fluids and Structures*, (2007).
- Wein O., Tovchigrechko V.V., Sobolik V.**, “Transient convective diffusion to a circular sink at finite Peclet number”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 49, 4596-4607, (2006).
- Wen C. Y., Lin. C.-Y.**, “Two-dimensional vortex shedding of a circular cylinder”. *Physics of Fluids*, Vol. 13, 557–560, (2001).
- Wendt F.**, “Turbulente Strömungen zwischen zwei rotierenden konaxialen Zylindern”, *Ing. Arch.* Vol. 4, 577-595, (1933).
- Wereley S.T., Lueptow R.M.**, “Spatio-temporal character of non-wavy and wavy Taylor-Couette flow,” *J. Fluid Mech.*, Vol. 364, 59-80, (1998).
- Wereley S.T., Akonur A., Lueptow R. M.**, Particle–fluid velocities and fouling in rotating filtration of a suspension, *Journal of Membrane Science*, Vol. 209 (2), 469-484, (2002).
- White F.M.**, “Viscous Fluid flow”, University of Rhode Island, (1991).
- Williamson C.H.K.**, “Defining a universal and continuous Strouhal-Reynolds number relationship for the laminar vortex shedding of a circular cylinder at low Reynolds number”, *Phys. Fluids* 31, 2742, (1988a)
- Williamson C.H.K.**, “The existence of two stages in the transition of the threedimensionality of a cylinder wake”, *Phys. Fluids*, 31, 3165, (1988b)
- Wolf-Gladrow D.A.**, “Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models – An Introduction“, Springer. 1725, (2000).
- Wouahbi F.Z.**, “Étude de l'écoulement Taylor Couette avec les sondes tri-segmentées électrochimiques”, Thèse de doctorat, Université de La Rochelle, (2009).
- Xiao Q., Lim T.T., Chew Y.T.**, “Second Taylor–Couette flow: effects of radius ratio and aspect ratio”, *Phys. Fluids*, Vol. 14, 1537–1539, (2002).
- Yu D., Mei R., Luo L.-S., Shyy W.**, "Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation," *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 39, 329-367, 2003.
- Zdravkovich M.M.**, “Flow around circular cylinder”, Oxford University press. vol.1, (1997).
- Zheng C., Lu J., Guo Z., Luo L.-S., Krafczyk M.**, “Mesoscopic methods in engineering and science”, *Computers & Mathematics with Applications*, (2011).
- Zheng G.S., Worek W.M.**, “Methods of heat and mass transfer enhancement in film evaporation, *International Journal of heat and mass transfer*”, Vol. 22, 1645-1656, (1979).
- Zidouh H.**, “Étude expérimentale du frottement pariétal instationnaire”, Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, (2007).
- Ziegler D.P.**, “Boundary conditions for the lattice Boltzmann simulations”, *J. Stat. Phys.*, Vol. 71, 1171. (1993).
- Zou Q., He X.**, “On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model”, *Phys. Fluids*, Vol. 9 (6), 1070-6631, (1997)
- Zovatto L., Pedrizzetti G.**, “Flow about a circular cylinder between parallel walls”, *J. of Fluid Mech.*, Vol. 440, 1-25, (2001).

[1] <http://hmf.enseiht.fr/travaux/CD0809/bei/beiep/6/html/index.html>

# **Annexes**



## ANNEXE A

### De l'équation de Boltzmann sur réseau à l'équation de convection- diffusion

Pour retrouver l'équation de convection diffusion à partir de l'équation de Lattice Boltzmann, on adopte le développement de Chapman-Enskog pour la séparation des échelles.

Soit  $L$  une longueur caractéristique de l'échelle macroscopique et  $\lambda$  une longueur caractéristique de l'échelle microscopique (par exemple, le libre parcours moyen). On peut ainsi définir le nombre de Knudsen:

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{L}$$

Ce nombre est utilisé comme un paramètre d'expansion dans la procédure du développement de Chapman-Enskog. En effet, en utilisant  $\varepsilon$  comme un paramètre d'expansion, la fonction de distribution  $g_i$  et le terme source de la chaleur s'écrivent :

$$g_i = g_i^{eq} + \varepsilon g_i^{(1)} + \varepsilon^2 g_i^{(2)}$$

$$Q = \varepsilon^2 q$$

En outre, compte tenu de la conservation des invariants de collision, on doit avoir :

$$\sum_i g_i^{(k)} = 0 \quad \text{pour } k \geq 1$$

En définissant une échelle de longueur  $L$  égale à  $1/\varepsilon$ , nous introduirons une nouvelle variable d'espace  $r_1$  définie par :

$$r_1 = \frac{r}{\varepsilon^{-1}} = \varepsilon r$$

Soit l'équation de convection diffusion :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial C}{\partial r_\alpha} = D \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left( \frac{\partial C}{\partial r_\alpha} \right) + Q.$$

En introduisant , la nouvelle échelle d'espace , on aura :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \varepsilon u_\alpha \frac{\partial C}{\partial r_{1\alpha}} = \varepsilon^2 D \frac{\partial}{\partial r_{1\alpha}} \left( \frac{\partial C}{\partial r_{1\alpha}} \right) + Q$$

Maintenant , si nous prenons comme échelle de temps  $\frac{1}{\varepsilon^2}$  on aura :

$$\frac{\varepsilon^2 \partial C}{\partial t} + \varepsilon u_\alpha \frac{\partial C}{\partial r_{1\alpha}} = \varepsilon^2 D \frac{\partial}{\partial r_{1\alpha}} \left( \frac{\partial C}{\partial r_{1\alpha}} \right) + Q$$

Ceci implique que le terme de convection est nul.

Si nous prenons comme échelle de temps  $\frac{1}{\epsilon}$ , on aura :

$$\frac{\epsilon \partial C}{\partial t} + \epsilon u_\alpha \frac{\partial C}{\partial r_{1\alpha}} = \epsilon^2 a \frac{\partial}{\partial r_{1\alpha}} \left( \frac{\partial C}{\partial r_{1\alpha}} \right) + Q$$

Ce qui implique que le terme de diffusion est nul. Pour éviter ce type de problème, on définit deux échelles de temps  $\frac{1}{\epsilon}$  et  $\frac{1}{\epsilon^2}$  :

$$t = \frac{t_1}{\epsilon} + \frac{t_2}{\epsilon^2}$$

Par conséquent, la dérivée par rapport au temps devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t_2} \frac{\partial t_2}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial t_1}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial t_2}{\partial t}$$

Soit l'équation de Lattice Boltzmann obtenue pour le transport par convection diffusion :

$$g_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) = g_i(r, t) + \frac{\Delta t}{\tau_d} [g_i^{eq}(r, t) - g_i(r, t)] + w_i \Delta t Q$$

$g_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t)$  peut être développée en série de Taylor par rapport à l'espace  $r$  et le temps  $t$  :

$$\begin{aligned} g_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) &= g_i(r, t) + c_{i\alpha} \Delta t \partial_{r\alpha} g_i + \Delta t \partial_t g_i \\ &+ \frac{(\Delta t)^2}{2} [c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{r\alpha} \partial_{r\beta} g_i + 2c_{i\alpha} \partial_{r\alpha} \partial_t g_i + \partial_t^2 g_i] \end{aligned}$$

En substituant l'équation ci-dessus dans l'équation de Lattice Boltzmann, on obtient:

$$c_{i\alpha} \partial_{r\alpha} g_i + \partial_t g_i + \frac{\Delta t}{2} [c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{r\alpha} \partial_{r\beta} g_i + 2c_{i\alpha} \partial_{r\alpha} \partial_t g_i + \partial_t^2 g_i] = \frac{1}{\tau_d} [g_i^{eq} - g_i] + w_i Q$$

En remplaçant les dérivés de temps et d'espace par leurs expressions :

$$\begin{aligned} \epsilon c_{i\alpha} \partial_{r_{1\alpha}} g_i + \epsilon \partial_{t_1} g_i + \epsilon^2 \partial_{t_2} g_i &+ \frac{\Delta t}{2} [\epsilon^2 c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{r_{1\alpha}} \partial_{r_{1\beta}} g_i + 2\epsilon^2 c_{i\alpha} \partial_{r_{1\alpha}} \partial_{t_1} g_i + 2\epsilon^3 c_{i\alpha} \partial_{r_{1\alpha}} \partial_{t_2} g_i \\ &+ \epsilon^2 \partial_{t_1} (\partial_{t_1} g_i) + \epsilon^4 \partial_{t_2} (\partial_{t_2} g_i)] = \frac{1}{\tau_d} [g_i^{eq} - g_i] + w_i Q \end{aligned}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à  $O(\epsilon^3)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \epsilon c_{i\alpha} \partial_{r1\alpha} g_i + \epsilon \partial_{t1} g_i + \epsilon^2 \partial_{t2} g_i + \epsilon^2 \frac{\Delta t}{2} [c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{r1\alpha} \partial_{r1\beta} g_i + 2c_{i\alpha} \partial_{r1\alpha} \partial_{t1} g_i + \partial_{t1} (\partial_{t1} g_i)] \\ & = \frac{1}{\tau_d} [g_i^{eq} - g_i] + w_i \epsilon^2 q \end{aligned}$$

En remplaçant  $g_i$  par son développement et en se limitant au second ordre en  $\epsilon$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \epsilon c_{i\alpha} \partial_{r1\alpha} g_i^{eq} + \epsilon \partial_{t1} g_i^{eq} + \epsilon^2 \partial_{t2} g_i^{eq} + \epsilon^2 c_{i\alpha} \partial_{r1\alpha} g_i^1 + \epsilon^2 \partial_{t1} g_i^1 + \epsilon^2 \frac{\Delta t}{2} [c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{r1\alpha} \partial_{r1\beta} g_i^{eq} + \\ & 2c_{i\alpha} \partial_{r1\alpha} \partial_{t1} g_i^{eq} + \partial_{t1} (\partial_{t1} g_i^{eq})] = -\frac{1}{\tau_d} [\epsilon g_i^{(1)} + \epsilon^2 g_i^{(2)}] + w_i \epsilon^2 q \end{aligned} \quad (A.1)$$

En rassemblant les termes de premier ordre, on aura :

$$c_{i\alpha} \partial_{r1\alpha} g_i^{eq} + \partial_{t1} g_i^{eq} = -\frac{1}{\tau_d} g_i^{(1)} \quad (A.2)$$

Nous dérivons cette équation par rapport à  $t_1$  et par rapport à  $r_1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & c_{i\alpha} \partial_{t1} (\partial_{r1\alpha} g_i^{eq}) + \partial_{t1} (\partial_{t1} g_i^{eq}) = -\frac{1}{\tau_d} \partial_{t1} g_i^{(1)} \\ & c_{i\alpha} \partial_{r1\beta} (\partial_{r1\alpha} g_i^{eq}) + \partial_{r1\beta} (\partial_{t1} g_i^{eq}) = -\frac{1}{\tau_d} \partial_{r1\beta} g_i^{(1)} \end{aligned} \quad (A.3)$$

En multipliant, la deuxième équation par  $c_{i\beta}$  et en faisant la somme avec la première équation, on obtient :

$$\begin{aligned} & c_{i\beta} c_{i\alpha} \partial_{r1\beta} (\partial_{r1\alpha} g_i^{eq}) + 2c_{i\beta} \partial_{r1\beta} (\partial_{t1} g_i^{eq}) + \partial_{t1} (\partial_{t1} g_i^{eq}) \\ & = -\frac{1}{\tau_d} (\partial_{t1} g_i^{(1)} + c_{i\beta} \partial_{r1\beta} g_i^{(1)}) \end{aligned} \quad (A.4)$$

En sommant sur toutes les directions, l'équation (A.2), on obtient :

$$\sum_i c_{i\alpha} \partial_{r1\alpha} g_i^{eq} + \sum_i \partial_{t1} g_i^{eq} = -\frac{1}{\tau} \sum_i g_i^{(1)}$$

Compte tenu des lois de conservation, le terme de droite est nul. Ainsi, on obtient :

$$\partial_{r1\alpha} (u_\alpha C) + \partial_{t1} (C) = 0 \quad (A.5)$$

En rassemblant, les termes du second ordre de l'équation (A.1), on obtient :

$$\begin{aligned} & \partial_{t2} g_i^{eq} + c_{i\alpha} \partial_{r1\alpha} g_i^1 + \partial_{t1} g_i^1 + \frac{\Delta t}{2} [c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{r1\alpha} \partial_{r1\beta} g_i^{eq} + 2c_{i\alpha} \partial_{r1\alpha} \partial_{t1} g_i^{eq} + \partial_{t1} (\partial_{t1} g_i^{eq})] = \\ & -\frac{1}{\tau_d} g_i^{(2)} + w_i q \end{aligned} \quad (A.6)$$

En utilisant l'équation (A.4), on obtient :

$$\partial_{t2}g_i^{eq} + c_{i\alpha}\partial_{r1\alpha}g_i^1 + \partial_{t1}g_i^1 - \frac{\Delta t}{2\tau}(\partial_{t1}g_i^{(1)} + c_{i\beta}\partial_{r1\beta}g_i^{(1)}) = -\frac{1}{\tau_d}g_i^{(2)} + w_iq \quad (\text{A.7})$$

Qui s'écrit encore :

$$\partial_{t2}g_i^{eq} + (1 - \frac{\Delta t}{2\tau_d})(\partial_{t1}g_i^{(1)} + c_{i\beta}\partial_{r1\beta}g_i^{(1)}) = -\frac{1}{\tau_d}g_i^{(2)} + w_iq \quad (\text{A.8})$$

En utilisant l'équation (A.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_{t2}g_i^{eq} + (1 - \frac{\Delta t}{2\tau_d})\partial_{t1}g_i^{(1)} - \tau_d(1 - \frac{\Delta t}{2\tau_d})(c_{i\beta}c_{i\alpha}\partial_{r1\beta}\partial_{r1\alpha}g_i^{eq} + c_{i\beta}\partial_{r1\beta}\partial_{t1}g_i^{eq}) = \\ -\frac{1}{\tau_d}g_i^{(2)} + w_iq \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

En faisant la somme sur toutes les directions, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_i \partial_{t2}g_i^{eq} + \left(1 - \frac{\Delta t}{2\tau}\right) \left[ \sum_i \partial_{t1}g_i^1 - \tau \left( \sum_i c_{i\beta}c_{i\alpha}\partial_{r1\beta}\partial_{r1\alpha}g_i^{eq} + c_{i\beta}\partial_{r1\beta}\partial_{t1}g_i^{eq} \right) \right] \\ = -\frac{1}{\tau_d}\sum_i g_i^{(2)} + \sum_i w_i \frac{q}{c} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Puisque  $g_i^{eq}$  est une fonction paire, alors on a :

$$\sum_i c_{i\beta}g_i^{eq} = 0 \Rightarrow \sum_i \partial_{r1\beta}\partial_{t1}(c_{i\beta}g_i^{eq}) = 0 \quad (\text{A.11})$$

L'équation (A.10) s'écrit donc :

$$\sum_i \partial_{t2}g_i^{eq} + \left(1 - \frac{\Delta t}{2\tau_d}\right) [0 - \tau_d(\sum_i c_{i\beta}c_{i\alpha}\partial_{r1\beta}\partial_{r1\alpha}g_i^{eq})] = 0 + \frac{q}{c} \quad (\text{A.12})$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \sum_i g_i^{eq} &= C \\ \sum_i c_{i\alpha}c_{i\beta}g_i^{eq} &= CRT\delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

L'équation (A.12) s'écrit :

$$\partial_{t2}(C) - RT\left(\tau_d - \frac{\Delta t}{2}\right)[\partial_{r1\alpha}\partial_{r1\alpha}(C)] = q \quad (\text{A.13})$$

En multipliant l'équation (A.5) par  $\varepsilon$  et (A.13) par  $\varepsilon^2$  et en faisant la somme, on obtient :

$$\varepsilon\partial_{r1\alpha}(u_\alpha C) + \varepsilon\partial_{t1}(C) + \varepsilon^2\partial_{t2}(C) = \varepsilon^2 RT \left(\tau_d - \frac{\Delta t}{2}\right) [\partial_{r1\alpha}\partial_{r1\alpha}(C)] + \varepsilon^2 q$$

Soit :

$$\partial_t(C) + \partial_{r\alpha}(u_\alpha C) = RT \left(\tau_d - \frac{\Delta t}{2}\right) [\partial_{r\alpha}\partial_{r\alpha}(C)] + q$$

Soit :

$$\partial_t(C) + \partial_{r\alpha}(u_\alpha C) = D[\partial_{r\alpha}\partial_{r\alpha}(C)] + q$$

Avec D :

$$D = RT \left( \tau_d - \frac{\Delta t}{2} \right)$$

En utilisant la vitesse du son  $c_s = \sqrt{RT}$ , on obtient :

$$D = c_s^2 \left( \tau_d - \frac{\Delta t}{2} \right) \tag{A.14}$$



## ANNEXE B

### **De l'équation de Boltzmann sur réseau aux équations de Navier –stockes**

Pour retrouver les équations de Navier - Stokes à partir de l'équation de Lattice Boltzmann sur réseau, on adopte le développement de Chapman-Enskog pour la séparation des échelles.

La description du mouvement collectif des particules nécessite la définition d'une longueur caractéristique de l'échelle macroscopique et d'une longueur caractéristique de l'échelle microscopique (par exemple, le libre parcours moyen  $\lambda$ ). On peut ainsi définir le nombre de Knudsen :

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{L} \quad (\text{B.1})$$

Ce nombre peut être utilisé comme un paramètre d'expansion dans la procédure de développement de Chapman-Enskog. En effet, en utilisant  $\varepsilon$  comme un paramètre d'expansion, la fonction de distribution  $f_i(r, t)$  s'écrit :

$$f_i = f_i^{eq} + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)} \quad (\text{B.2})$$

En outre, compte tenu de la conservation des invariants et de collision, on doit avoir :

$$\sum_i f_i^{(k)} = \sum_i c_i f_i^{(k)} = 0 \quad \text{pour } k \geq 1 \quad (\text{B.3})$$

En définissant une échelle de longueur  $L$  égale à  $1/\varepsilon$ , nous introduirons une nouvelle variable d'espace  $r_1$  définie par :

$$r_1 = \frac{r}{\varepsilon^{-1}} = \varepsilon r \quad (\text{B.4})$$

On peut distinguer deux échelles de temps, (rapide et lent). Par exemple, les effets de la non-linéarité et de la pression se propagent plus « rapidement », ils sont présentés dans l'équation aux dérivées partielles par des dérivés de l'espace de premier ordre. Par conséquent, une telle non homogénéité va traverser l'échelle de longueur de l'ordre de  $\varepsilon^{-1}$  dans un temps d'ordre  $\varepsilon^{-1}$ .

Cependant, les effets de diffusion linéaire se produisent « lentement » et sont représentés au niveau de l'équation aux dérivées partielles par des dérivées de l'espace du second ordre. Par conséquent, une telle non-homogénéité va traverser une échelle de longueur de l'ordre  $\varepsilon^{-1}$  dans un temps d'ordre  $\varepsilon^{-2}$ . S'appuyant sur ceci, on peut définir deux nouvelles échelles de temps, une échelle rapide  $t_1$  et une lente  $t_2$  :

$$t_1 \approx \frac{t}{\varepsilon^{-1}} \text{ et } t_2 \approx \frac{t}{\varepsilon^{-2}}$$

Ainsi t peut s'écrire sous la forme :

$$t = \varepsilon^{-1}t_1 + \varepsilon^{-2}t_2 \quad (\text{B.5})$$

Par conséquent la dérivée par rapport au temps devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t_2} \frac{\partial t_2}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \quad (\text{1.15}) \quad (\text{B.6})$$

La dérivée par rapport à l'espace devient :

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial r_1} \quad (\text{1.16}) \quad (\text{B.7})$$

L'accélération implique une dérivée seconde du déplacement par rapport au temps :

$$F = \partial_t v = \partial_t(\partial_t r)$$

On peut conclure à partir de cette relation que F est d'ordre  $O(\varepsilon^2)$  . Elle peut être développée sous la forme suivante :

$$F = \varepsilon^2 F^{(2)} + \varepsilon^3 F^{(3)} + \dots \quad (\text{1.17}) \quad (\text{B.8})$$

La forme générale de l'équation de Lattice Boltzmann avec terme force s'écrit donc :

$$f_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(r, t) + \frac{\Delta t}{\tau} [f_i^{eq}(r, t) - f_i(r, t)] + \Delta t \frac{F}{m} \cdot \frac{(c_i - u) f_i^{eq}}{RT} \quad (\text{B.9})$$

Le développement de  $f_i^{eq}$  en série de Taylor conduit à :

$$f_i^{eq} = w_i \left( 1 + \frac{c_i \cdot u}{RT} + \left( \frac{c_i \cdot u}{RT} \right)^2 - \frac{u^2}{2RT} \right) \quad (\text{B.10})$$

En négligeant les termes d'ordre  $u^2$ , on aura :

$$\frac{F \cdot (c_i - u)}{RT} f_i^{eq} \Delta t = \frac{w_i F}{RT} \left[ (c_i - u) + c_i \cdot \frac{c_i \cdot u}{RT} \right] \Delta t \quad (\text{B.11})$$

Ainsi, l'équation de Boltzmann s'écrit :

$$f_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(r, t) + \frac{\Delta t}{\tau} [f_i^{eq} - f_i] + \frac{w_i F}{mRT} \left[ (c_i - u) + c_i \cdot \frac{c_i \cdot u}{RT} \right] \Delta t \quad (\text{B.12})$$

(1.18)

$f_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t)$  peut être développée en série de Taylor par rapport à l'espace r et le temps t :

$$f_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(r, t) + c_{i\alpha} \Delta t \partial_{r\alpha} f_i + \Delta t \partial_t f_i + \frac{(\Delta t)^2}{2} [c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{r\alpha} \partial_{r\beta} f_i + 2c_{i\alpha} \partial_{r\alpha} \partial_t f_i + \partial_t^2 f_i] \quad (\text{B.13})$$

En substituant l'équation ci-dessus dans l'équation (B.12) on obtient:

$$c_{i\alpha}\partial_{r\alpha}f_i + \partial_t f_i + \frac{\Delta t}{2} [c_{i\alpha}c_{i\beta}\partial_{r\alpha}\partial_{r\beta}f_i + 2c_{i\alpha}\partial_{r\alpha}\partial_t f_i + \partial_t^2 f_i] = \frac{1}{\tau} [f_i^{eq} - f_i] + \frac{w_i F}{mRT} [(c_i - u) + c_i \cdot \frac{c_i \cdot u}{RT}] \quad (\text{B.14})$$

En remplaçant les dérivés de temps et d'espace par leurs expressions (B.6) et (B.7) ainsi que le terme force par l'expression (B.8) on obtient :

$$\epsilon c_{i\alpha}\partial_{r1\alpha}f_i + (\epsilon\partial_{t1}f_i + \epsilon^2\partial_{t2}f_i) + \frac{\Delta t}{2} [\epsilon^2 c_{i\alpha}c_{i\beta}\partial_{r1\alpha}\partial_{r1\beta}f_i + 2\epsilon c_{i\alpha}\partial_{r1\alpha}(\epsilon\partial_{t1}f_i + \epsilon^2\partial_{t2}f_i) + (\epsilon\partial_{t1} + \epsilon^2\partial_{t2})(\epsilon\partial_{t1}f_i + \epsilon^2\partial_{t2}f_i)] = \frac{1}{\tau} [f_i^{eq} - f_i] + \frac{w_i(\epsilon^2 F^{(2)} + \epsilon^3 F^{(3)} + \dots)}{mRT} [(c_i - u) + c_i \cdot \frac{c_i \cdot u}{RT}] \quad (\text{B.15})$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à  $O(\epsilon^3)$ , on obtient :

$$\epsilon(c_{i\alpha}\partial_{r1\alpha} + \partial_{t1})f_i + \epsilon^2(\partial_{t2}f_i + \frac{\Delta t}{2} [c_{i\alpha}c_{i\beta}\partial_{r1\alpha}\partial_{r1\beta} + 2c_{i\alpha}\partial_{r1\alpha}\partial_{t1} + \partial_{t1}^2]f_i) = \frac{1}{\tau} [f_i^{eq} - f_i] + \frac{w_i(\epsilon^2 F^{(2)})}{mRT} [(c_i - u) + c_i \cdot \frac{c_i \cdot u}{RT}] \quad (\text{B.16})$$

En remplaçant, par la suite,  $f_i$  par son développement et en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à  $O(\epsilon^3)$ , on obtient:

$$\epsilon(c_{i\alpha}\partial_{r1\alpha} + \partial_{t1})f_i^{eq} + \epsilon^2(c_{i\alpha}\partial_{r1\alpha} + \partial_{t1})f_i^1 + \epsilon^2(\partial_{t2}f_i + \frac{\Delta t}{2} [c_{i\alpha}c_{i\beta}\partial_{r\alpha}\partial_{i\beta} + 2c_{i\alpha}\partial_{r1\alpha}\partial_{t1} + \partial_{t1}^2]f_i^{eq}) + \frac{1}{\tau} [\epsilon f_i^1 + \epsilon^2 f_i^2] = \frac{w_i(\epsilon^2 F^{(2)})}{mRT} [(c_i - u) + c_i \cdot \frac{c_i \cdot u}{RT}] \quad (\text{B.16})$$

Par la suite cette équation est écrite sous la forme :

$$\epsilon E_i^{(1)} + \epsilon^2 E_i^{(2)} = 0 \quad (\text{B.17})$$

Avec :

$$E_i^{(1)} = (c_{i\alpha}\partial_{r1\alpha} + \partial_{t1})f_i^{eq} + \frac{1}{\tau} f_i^{(1)} = 0 \quad (\text{B.18})$$

$$E_i^{(2)} = (\partial_{t2} + \frac{\Delta t}{2} [c_{i\alpha}c_{i\beta}\partial_{r1\alpha}\partial_{r1\beta} + 2c_{i\alpha}\partial_{r1\alpha}\partial_{t1} + \partial_{t1}^2])f_i^{eq} + (c_{i\alpha}\partial_{r1\alpha} + \partial_{t1})f_i^1 + \frac{1}{\tau} f_i^{(2)} - B_i^2 = 0 \quad (\text{B.19})$$

Avec  $B_i^{(2)}$  :

$$B_i^{(2)} = \frac{w_i F^{(2)}}{mRT} [(c_i - u) + c_i \cdot \frac{c_i \cdot u}{RT}] \Delta t \quad (\text{B.20})$$

**Premier ordre :**

**Conservation de la masse :**

$$\sum_i E_i^{(1)} = 0 \quad (\text{B.21})$$

implique :

$$\sum_i E_i^{(1)} = \sum_i \partial_{t1} f_i^{eq} + \sum_i c_{i\alpha} \partial_{r1\alpha} f_i^{eq} + \frac{1}{\tau} \sum_i f_i^{(1)} = 0 \quad (\text{B.22})$$

qui s'écrit encore :

$$\partial_{t1} \sum_i f_i^{eq} + \partial_{r1\alpha} \sum_i c_{i\alpha} f_i^{eq} + \frac{1}{\tau} \sum_i f_i^{(1)} = 0 \quad (\text{B.23})$$

D'où on aura :

$$\partial_{t1} \rho + \partial_{r1\alpha} \rho u_\alpha + 0 = 0 \quad (\text{B.24})$$

**Conservation de la quantité de mouvement :**

$$\sum_i c_{i\alpha} E_i^{(1)} = 0 \quad (\text{B.25})$$

Ce ci implique :

$$\sum_i c_{i\alpha} E_i^{(1)} = \sum_i c_{i\alpha} \partial_{t1} f_i^{eq} + \sum_i c_{i\alpha} c_{i\alpha} \partial_{r1\alpha} f_i^{eq} + \frac{1}{\tau} \sum_i c_{i\alpha} f_i^{(1)} = 0 \quad (\text{B.24})$$

qui s'écrit encore :

$$\partial_{t1} \sum_i c_{i\alpha} f_i^{eq} + \partial_{r1\alpha} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{eq} + \frac{1}{\tau} \sum_i c_{i\alpha} f_i^{(1)} = 0 \quad (\text{B.25})$$

D'où on aura :

$$\partial_{t1} \rho u_\alpha + \partial_{r1\beta} [\Pi_{\alpha\beta}(0)] + 0 = 0 \quad \dots\dots\dots (\text{B.26})$$

avec :

$$\Pi_{\alpha\beta}^0 = \sum_a c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{eq} \quad (\text{B.27})$$

appelé le tenseur du flux dynamique d'ordre zéro, qui représente le flux de quantité de mouvement de la composante  $\alpha$  le long de l'axe  $\beta$ .

$$\Pi_{\alpha\beta}^0 = \sum_a c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{eq} \quad (\text{B.28})$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^0 = \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} w_i \left( 1 + \frac{c_{i\gamma} u_\gamma}{RT} + \frac{c_{i\gamma} u_\gamma c_{i\xi} u_\xi}{2(RT)^2} - \frac{u_\gamma u_\gamma}{2RT} \right) \quad (\text{B.29})$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^0 = \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} w_i + \frac{u_\gamma}{RT} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} w_i c_{i\gamma} + \frac{u_\gamma u_\xi}{2(RT)^2} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} w_i c_{i\gamma} c_{i\xi} - \frac{u_\gamma u_\gamma}{2RT} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} w_i \quad (\text{B.30})$$

Compte tenu des équations de conservations, on aura :

$$\Pi_{\alpha\beta}^0 = \rho RT \delta_{\alpha\beta} + 0 + \frac{u_\gamma u_\xi}{2(RT)^2} \rho (RT)^2 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\xi\gamma} + \delta_{\alpha\xi} \delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\xi\beta}) - \frac{u_\gamma u_\gamma}{2RT} \rho RT \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{B.31})$$

En supposant que le gaz est parfait :  $p = \rho RT$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta}^0 &= p \delta_{\alpha\beta} + \rho \frac{u_\gamma u_\xi}{2} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\xi\gamma} + \delta_{\alpha\xi} \delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\xi\beta}) - \rho \frac{u_\gamma u_\gamma}{2} \delta_{\alpha\beta} \\ \Pi_{\alpha\beta}^0 &= p \delta_{\alpha\beta} + \rho \frac{u_\gamma u_\xi}{2} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\xi\gamma} + \rho \frac{u_\alpha u_\beta}{2} ((\delta_{\alpha\alpha} \delta_{\beta\beta} + \delta_{\alpha\alpha} \delta_{\beta\beta})) - \rho \frac{u_\gamma u_\gamma}{2} \delta_{\alpha\beta} \\ \Pi_{\alpha\beta}^0 &= p \delta_{\alpha\beta} + \rho \frac{u_\gamma u_\gamma}{2} \delta_{\alpha\beta} + \rho \frac{u_\alpha u_\beta}{2} (\delta_{\alpha\alpha} \delta_{\beta\beta} + \delta_{\alpha\alpha} \delta_{\beta\beta}) - \rho \frac{u_\gamma u_\gamma}{2} \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^0 = p \delta_{\alpha\beta} + \rho u_\alpha u_\beta \quad (\text{B.33})$$

Etant donné la définition de  $p$ , on peut déterminer l'expression de la vitesse du son  $c_s$  :

$$c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{RT} \quad (\text{B.34})$$

**Au second ordre :  $E_a^{(2)}$**

**Conservation de la masse :**

$$\sum_i E_i^{(2)} = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_i E_i^{(2)} &= \sum_i \left[ (\partial_{t2} + \frac{\Delta t}{2} [c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{r1\alpha} \partial_{r1\beta} + 2c_{i\alpha} \partial_{r1\alpha} \partial_{t1} + \partial_{t1}^2]) f_i^{eq} + (c_{i\alpha} \partial_{r1\alpha} + \partial_{t1}) f_i^1 + \right. \\ &\left. \frac{1}{\tau} f_i^{(2)} - B_i^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \partial_{t2} (\sum_i f_i^{eq}) + \frac{\Delta t}{2} \partial_{r1\alpha} \partial_{r1\beta} (\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{eq}) + \Delta t \partial_{r1\alpha} \partial_{t1} (\sum_i c_{i\alpha} f_i^{eq}) + \frac{\Delta t}{2} \partial_{t1}^2 (\sum_i f_i^{eq}) + \\ \partial_{r1\alpha} (\sum_i c_{i\alpha} f_i^1) + \partial_{t1} (\sum_i f_i^1) + \frac{1}{\tau} (\sum_i f_i^2) - (\sum_i B_i^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_{t2} (\rho) + \frac{\Delta t}{2} \partial_{r1\alpha} \partial_{r1\beta} (\Pi_{\alpha\beta}^0) + \Delta t \partial_{r1\alpha} \partial_{r1\beta} (\rho u_\alpha) + \frac{\Delta t}{2} \partial_{t1}^2 (\rho) + \partial_{r1\alpha} (0) + \partial_{t1} (0) + \frac{1}{\tau} (0) - \\ (0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

$\sum_i B_i^2$  est une somme de moments impairs. Par conséquent, on a :  $\sum_i B_i^2 = 0$

Ainsi, on aura :

$$\partial_{t2} (\rho) + \frac{\Delta t}{2} \partial_{r1\alpha} \partial_{r1\beta} (\Pi_{\alpha\beta}^0) + \Delta t \partial_{r1\alpha} \partial_{t1} (\rho u_\alpha) + \frac{\Delta t}{2} \partial_{t1}^2 (\rho) = 0 \quad (\text{B.38})$$

D'après (B.26) le troisième terme peut s'écrire sous la forme :

$$\partial_{r1\alpha} \partial_{t1} (\rho u_\alpha) = -\partial_{r1\alpha} \partial_{r1\beta} [\Pi_{\alpha\beta}^0] \quad (\text{B.39})$$

Le dernier terme peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\Delta t}{2} \partial_{t_1}^2(\rho) = \frac{\Delta t}{2} \partial_{t_1}(\partial_{t_1}\rho) = -\frac{\Delta t}{2} \partial_{t_1}(\partial_{r_1\alpha}(\rho u_\alpha)) = \partial_{r_1\alpha} \partial_{r_1\beta} [\Pi_{\alpha\beta}^0] \quad (\text{B.40})$$

Par la suite, en remplaçant ces termes dans l'équation (B.38), on obtient:

$$\partial_{t_2}(\rho) + \frac{\Delta t}{2} \partial_{r_1\alpha} \partial_{r_1\beta} (\Pi_{\alpha\beta}^0) - \partial_{r_1\alpha} \partial_{r_1\beta} [\Pi_{\alpha\beta}^0] + \frac{\Delta t}{2} \partial_{r_1\alpha} \partial_{r_1\beta} [\Pi_{\alpha\beta}^0] = 0 \quad (\text{B.41})$$

D'où on aura :

$$\partial_{t_2}\rho = 0$$

**Conservation de la quantité de mouvement :**

$$\sum_i c_{i\alpha} E_i^{(2)} = 0 \quad (\text{B.50})$$

Qui peut s'écrire en remplaçant  $E_a^{(2)}$  par son expression :

$$\sum_i c_{i\alpha} E_i^{(2)} = \sum_i c_{i\alpha} \left[ (\partial_{t_2} + \frac{\Delta t}{2} [c_{i\beta} c_{i\gamma} \partial_{r_1\alpha} \partial_{r_1\beta} + 2c_{i\beta} \partial_{r_1\alpha} \partial_{t_1} + \partial_{t_1}^2]) f_i^{eq} + (c_{i\beta} \partial_{r_1\alpha} + \partial_{t_1}) f_i^1 + \frac{1}{\tau} f_i^{(2)} - B_i^2 \right] = 0 \quad (\text{B.51})$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} & \partial_{t_2}(\sum_i c_{i\alpha} f_i^{eq}) + \frac{\Delta t}{2} \partial_{r_1\alpha} \partial_{r_1\beta} (\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} f_i^{eq}) + \Delta t \partial_{r_1\alpha} \partial_{t_1} (\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{eq}) + \\ & \frac{\Delta t}{2} \partial_{t_1}^2 (\sum_i c_{i\alpha} f_i^{eq}) + \partial_{r_1\alpha} (\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^1) + \partial_{t_1} (\sum_i c_{i\alpha} f_i^1) + \frac{1}{\tau} (\sum_i c_{i\alpha} f_i^2) - (\sum_i c_{i\alpha} B_i^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

Qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} & \partial_{t_2}(\rho u_\alpha) + \frac{\Delta t}{2} \partial_{r_1\alpha} \partial_{r_1\beta} (\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} f_i^{eq}) + \Delta t \partial_{r_1\alpha} \partial_{t_1} (\Pi_{\alpha\beta}^0) + \frac{\Delta t}{2} \partial_{t_1} (\partial_{t_1}(\rho u_\alpha)) + \\ & \partial_{r_1\alpha} (\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^1) + \partial_{t_1} (0) + \frac{1}{\tau} (0) - (\sum_i c_{i\alpha} B_i^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Or on a:

$$\sum_i c_{i\alpha} B_i^2 = \sum_i c_{i\alpha} \frac{w_i F^{(2)}}{mRT} \left[ \left[ (c_i - u) + c_i \cdot \frac{c_i \cdot u}{RT} \right] = \sum_i c_{i\alpha} \frac{w_i}{mRT} \left[ \left[ (F_\beta^2 c_{i\beta} - F_\beta^2 u_\beta) + F_\beta^2 c_{i\beta} \cdot \frac{c_{i\gamma} u_\gamma}{RT} \right] \right] \quad (\text{B.54})$$

$$\sum_i c_{i\alpha} B_i^2 = \frac{1}{mRT} F_\beta^2 \sum_i c_{i\alpha} w_i c_{i\beta} - \frac{1}{mRT} u_\beta F_\beta^2 \sum_i c_{i\alpha} w_i + \frac{1}{m(RT)^2} F_\beta^2 \sum_i c_{i\alpha} w_i c_{i\beta} c_{i\gamma}$$

Les moments impairs sont nuls, on aura donc :

$$\sum_i c_{i\alpha} B_i^2 = \frac{1}{mRT} F_\beta^2 \sum_i c_{i\alpha} w_i c_{i\beta} + \rho RT \delta_{\alpha\beta} 0 + 0 = \frac{1}{mRT} \rho RT F_\beta^2 \delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{m} \rho F_\alpha^2$$

- En posant  $F_\alpha = \frac{F_\alpha}{m}$ , on aura :

$$\begin{aligned} & \partial_{t_2}(\rho u_\alpha) + \frac{\Delta t}{2} \partial_{r_{1\alpha}} \partial_{r_{1\beta}} (\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} f_i^{eq}) + \Delta t \partial_{r_{1\beta}} \partial_{t_1} (\Pi_{\alpha\beta}^0) - \frac{\Delta t}{2} \partial_{t_1} (\partial_{r_{1\beta}} (\Pi_{\alpha\beta}^0)) + \\ & \partial_{r_{1\alpha}} (\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^1) - \rho F_\alpha^2 = 0 \end{aligned} \quad (B.55)$$

Nous supposons que :

$$\epsilon f_i^{(1)} = f_i - f_i^{(eq)} = -\tau (f_i^{(eq)}(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i^{(eq)}(r, t)) \quad (B.56)$$

En s'arrêtant à l'ordre  $\epsilon$ , on aura :

$$\epsilon f_i^1 = f_i - f_i^{eq} = -\epsilon \tau (c_{i\gamma} \partial_{r_{1\gamma}} + \partial_{t_1}) f_i^{eq} \quad (B.57)$$

D'où on aura :

$$f_i^1 = -\epsilon \tau (c_{i\gamma} \partial_{r_{1\gamma}} + \partial_{t_1}) f_i^{eq} \quad (B.58)$$

En remplaçant l'expression de  $f_i^{(1)}$  dans l'équation (B.38) :

$$\partial_{t_2}(\rho u_\alpha) + \left(\frac{\Delta t}{2} - \tau\right) \partial_{r_{1\alpha}} \partial_{r_{1\beta}} (\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} f_i^{eq}) + \left(\frac{\Delta t}{2} - \tau\right) \partial_{t_1} (\partial_{r_{1\beta}} (\Pi_{\alpha\beta}^0)) - \rho F_\alpha^2 = 0 \quad (B.59)$$

Le deuxième terme peut être évalué en remplaçant  $f_i^{eq}$  par son expression :

$$\begin{aligned} & \partial_{r_{1\alpha}} \partial_{r_{1\beta}} (\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} f_i^{eq}) = \partial_{r_{1\alpha}} \partial_{r_{1\beta}} \left( \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} w_i \left( 1 + \frac{c_{i\xi} u_\xi}{c_s^2} + \frac{c_{i\psi} u_\psi c_{i\xi} u_\xi}{2c_s^4} - \frac{u_\xi u_\xi}{2c_s^2} \right) f_i^{eq} \right) \\ & \partial_{r_{1\alpha}} \partial_{r_{1\beta}} (\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} f_i^{eq}) = \partial_{r_{1\alpha}} \partial_{r_{1\beta}} \left[ \left( \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} w_i \right) + \left( \frac{u_\xi}{c_s^2} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} w_i c_{i\xi} \right) + \right. \\ & \left. \left( \frac{u_\psi u_\xi}{2c_s^2} \sum_i c_{i\psi} c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} c_{i\xi} w_i \right) - \left( \frac{u_\xi u_\xi}{2c_s^2} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} w_i \right) \right] \end{aligned} \quad (B.60)$$

Tous les moments impairs sont nuls :

$$\partial_{r_{1\alpha}} \partial_{r_{1\beta}} (\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} f_i^{eq}) = 0 + \partial_{r_{1\alpha}} \partial_{r_{1\beta}} \left( \frac{u_\xi}{c_s^2} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} w_i c_{i\xi} \right) + 0 - 0 \quad (B.61)$$

Ainsi, on aura :

$$\begin{aligned} & \partial_{r_{1\alpha}} \partial_{r_{1\beta}} (\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} f_i^{eq}) = \partial_{r_{1\alpha}} \partial_{r_{1\beta}} \frac{u_\xi}{c_s^2} \left( \rho c_s^4 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\xi\gamma} + \delta_{\alpha\xi} \delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\xi\beta}) \right) = c_s^2 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\xi\gamma} + \\ & \delta_{\alpha\xi} \delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\xi\beta}) (\partial_{r_{1\alpha}} \partial_{r_{1\beta}} (\rho u_\xi)) \end{aligned} \quad (B.62)$$

Rappelons que :

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta}^0 &= \sum_a c_{i\alpha} c_{i\beta} f_i^{eq} \\ \Pi_{\alpha\beta}^0 &= \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} w_i \left( 1 + \frac{c_{i\gamma} u_\gamma}{RT} + \frac{c_{i\gamma} u_\gamma c_{i\xi} u_\xi}{2(RT)^2} - \frac{u_\gamma u_\gamma}{2RT} \right) \end{aligned} \quad (B.63)$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^0 = \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} w_i + \frac{u_\gamma}{RT} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} w_i c_{i\gamma} + \frac{u_\gamma u_\xi}{2(RT)^2} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} w_i c_{i\gamma} c_{i\xi} - \frac{u_\gamma u_\gamma}{2RT} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} w_i$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à  $u^2$  et sachant que le deuxième terme est nul, on obtient :

$$\Pi_{\alpha\beta}^0 = \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} w_i = \rho c_s^2 \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{B.64})$$

Ainsi le troisième terme peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \partial_{t1} \left( \partial_{r1\beta} (\Pi_{\alpha\beta}^0) \right) &= \partial_{t1} \left( \partial_{r1\beta} (\rho c_s^2) \right) \delta_{\alpha\beta} = c_s^2 \partial_{r1\beta} (\partial_{t1} \rho) \delta_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} c_s^2 \partial_{r1\beta} (\partial_{r1\gamma} \rho u_\gamma) = \\ &= -c_s^2 \partial_{r1\alpha} (\partial_{r1\gamma} \rho u_\gamma) \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

En remplaçant tout simplement  $\gamma$  par  $\beta$ , on aura :

$$c_s^2 \partial_{r1\beta} (\partial_{t1} \rho) \delta_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} c_s^2 \partial_{r1\beta} (\partial_{r1\gamma} (\rho u_\gamma)) = -c_s^2 \partial_{r1\alpha} (\partial_{r1\gamma} (\rho u_\gamma)) = -c_s^2 \partial_{r1\alpha} (\partial_{r1\beta} (\rho u_\beta))$$

En remplaçant, par la suite le terme 2 et le terme 3 par leurs expressions dans l'équation (7) et en posant :

$$v = RT \left( \tau - \frac{\Delta t}{2} \right) = c_s^2 \left( \tau - \frac{\Delta t}{2} \right) \quad (\text{B.66})$$

On obtient:

$$\partial_{t2} (\rho u_\alpha) + v (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\xi\gamma} + \delta_{\alpha\xi} \delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\xi\beta}) (\partial_{r1\alpha} \partial_{r1\beta} (\rho u_\xi)) - v \delta_{\alpha\beta} \partial_{r1\beta} (\partial_{r1\gamma} \rho u_\gamma) - \rho F_\alpha^2 = 0$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \partial_{r1\beta} \left[ (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\xi\gamma} + \delta_{\alpha\xi} \delta_{\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\xi\beta}) (\partial_{r1\alpha} (\rho u_\xi)) - \delta_{\alpha\beta} (\partial_{r1\gamma} \rho u_\gamma) \right] &= \partial_{r1\beta} \left[ (\partial_{r1\beta} (\rho u_\gamma)) + \right. \\ \delta_{\beta\gamma} (\partial_{r1\gamma} (\rho u_\gamma)) + (\partial_{r1\gamma} (\rho u_\beta)) - \delta_{\alpha\beta} (\partial_{r1\gamma} \rho u_\gamma) \left. \right] &= \partial_{r1\beta} \left[ (\partial_{r1\beta} (\rho u_\gamma)) + (\partial_{r1\gamma} (\rho u_\beta)) \right] \\ \partial_{r1\beta} \left[ (\partial_{r1\beta} (\rho u_\gamma)) + (\partial_{r1\gamma} (\rho u_\beta)) \right] &= \partial_{r1\beta} [T_{\beta\gamma}] \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

$T_{\beta\gamma}$  est un tenseur d'ordre 2 qui s'écrit :

$$T_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} & 2 \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} & 2 \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{B.68})$$

$\partial_{r1\beta} [T_{\beta\gamma}]$  est un vecteur  $P_\gamma$  de coordonnées :

$$\begin{aligned}
P_\gamma &= \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \\
P_\gamma &= \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{B.69}) \\
P_\gamma &= \begin{pmatrix} \Delta(u_1) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\ \Delta(u_2) + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \\ \Delta(u_3) + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, on aura :

$$P_\gamma = \begin{pmatrix} \Delta(u_1) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \\ \Delta(u_2) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \\ \Delta(u_3) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{B.70})$$

Qui s'écrit sous la forme :

$$P_\alpha = \partial_{r1\alpha} [T_{\alpha\gamma}] = \partial_{r1\beta} \partial_{r1\beta} (\rho u_\alpha) + \partial_{r1\alpha} \partial_{r1\beta} (\rho u_\beta)$$

Ainsi, on aura :

$$\partial_{t_2} (\rho u_\alpha) = v [\partial_{r1\beta} \partial_{r1\beta} (\rho u_\alpha) + \partial_{r1\alpha} \partial_{r1\beta} (\rho u_\beta)] + \rho F_\alpha^{(2)} \quad (\text{B.71})$$

### **Combinaison des ordres :**

#### **Conservation de la masse :**

$$\sum_i \epsilon E_i^{(1)} + \epsilon^2 E_i^{(2)} = 0 \quad (\text{B.72})$$

En combinant les équations dynamiques du premier et du second ordre on obtient :

$$\epsilon (\partial_{t1} \rho + \partial_{r1\alpha} \rho u_\alpha) + \epsilon^2 (\partial_{t2} \rho) = 0 \quad (\text{B.73})$$

Qui s'écrit encore :

$$(\epsilon \partial_{t_1} \rho + \epsilon^2 \partial_{t_2} \rho) + \epsilon \partial_{r_1 \alpha} \rho u_\alpha = 0 \quad (\text{B.74})$$

Ainsi, on aboutit l'équation de continuité :

$$\partial_t \rho + \partial_{r_\alpha} (\rho u_\alpha) = 0 \quad (\text{B.75})$$

### **Conservation de la quantité de mouvement :**

$$\sum_i c_{i\alpha} \left( \epsilon E_i^{(1)} + \epsilon^2 E_i^{(2)} \right) = 0 \quad (\text{B.76})$$

En combinant les équations macroscopiques de premier et second ordre, on obtient :

$$\epsilon \left( \partial_{t_1} \rho u_\alpha + \partial_{r_{1\beta}} (\Pi_{\alpha\beta}^0) \right) + \epsilon^2 \left( \partial_{t_2} (\rho u_\alpha) - \nu [\partial_{r_{1\beta}} \partial_{r_{1\beta}} (\rho u_\alpha) + \partial_{r_{1\alpha}} \partial_{r_{1\beta}} (\rho u_\beta)] - \rho F_\alpha^{(2)} \right) = 0 \quad (\text{B.77})$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\partial_t \rho u_\alpha + \partial_{r_\beta} (\Pi_{\alpha\beta}^0) = \nu [\partial_{r_\beta} \partial_{r_\beta} (\rho u_\alpha) + \partial_{r_\alpha} \partial_{r_\beta} (\rho u_\beta)] + \rho F_\alpha = 0 \quad (\text{B.78})$$

### **Cas incompressible :**

Dans le cas incompressible on a  $\rho = \text{cte}$ , l'équation de continuité s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\partial_{r_\alpha} (u_\alpha) = 0$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit sous la forme suivante :

$$\partial_t u_\alpha + \frac{1}{\rho} \partial_{r_\beta} (\Pi_{\alpha\beta}^0) = \nu \partial_{r_\beta} \partial_{r_\beta} (u_\alpha) + F_\alpha \quad (\text{B.79})$$

En substituant  $\Pi_{\alpha\beta}^0$  par son expression, on obtient l'équation de Navier-Stokes :

$$\partial_t u_\alpha + u_\beta \left( \partial_{r_\beta} (u_\alpha) \right) = -\frac{1}{\rho} (\partial_{r_\alpha} p) + \nu \partial_{r_\beta} \partial_{r_\beta} (u_\alpha) + F_\alpha \quad (\text{B.80})$$

***Titre :*** *Investigations expérimentales et modélisation numérique par la méthode de Lattice Boltzmann (LBM) pour l'étude des transferts dans les écoulements tourbillonnaires*

Ce travail numérique et expérimental, porte sur l'étude des instabilités et sur les transferts dans deux configurations d'écoulements tourbillonnaires : Le sillage derrière un obstacle et l'écoulement de Couette-Taylor. Une simulation numérique, basée sur la méthode de « Lattice Boltzmann » (LBM), a été développée pour étudier la dynamique de l'écoulement confiné autour d'un obstacle dans une configuration géométrique 2D et 3D. Une extension de ce code a été effectuée pour simuler le transfert de masse pariétal. Par la suite, des investigations expérimentales sur les mécanismes de transferts dans le sillage d'un obstacle et dans un écoulement de Couette-Taylor ont été réalisées. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux de la simulation numérique, validant ainsi notre code développé et mettant en valeur la performance de la méthode LBM.

Des résultats expérimentaux qualitatifs (visualisations) et quantitatifs (PIV et polarographie) ont été mis en place pour caractériser les écoulements tourbillonnaires étudiés. Un post-traitement des mesures réalisées par PIV, utilisant des critères de détection et la POD, a été développé.

La méthode polarographique, au moyen de sondes simples et une tri-segmentée, a été utilisée pour la détermination du gradient pariétal de vitesse. Une synchronisation entre les mesures obtenues par PIV et celles déterminées par la polarographie, a permis de mieux comprendre les interactions spatiotemporelles entre les tourbillons et les parois.

***Mots clés :*** *Méthode de Lattice Boltzmann ; Écoulement confiné derrière un obstacle ; Écoulement de Couette-Taylor ; Structures cohérentes ; Écoulements tourbillonnaires ; PIV ; POD et critères de détection ; Polarographie ; Synchronisation PIV-polarographie ;*

***Title:*** *Experimental investigations and numerical simulations using the Lattice Boltzmann Method (LBM) for the study of transfers in vortex flows.*

The numerical and experimental work focuses on the study of instabilities and transfers in two configurations of vortex flows: The wake behind an obstacle and Taylor-Couette flow.

A numerical simulation based on the method of "Lattice Boltzmann" (LBM) has been developed to study the dynamics of the confined flow around an obstacle in a 2D and 3D geometry.

An extension of this code was performed to enable the wall shear stress simulations (mass transfer).

Thereafter, experimental investigations of the mass transfer mechanisms in the wake of an obstacle and in a Taylor-Couette flow were initiated. The results were compared to that obtained by simulation (LBM). The main objective is to check the validity of the developed code and to highlight the LBM performances.

Experimental results, qualitative (visualizations) and quantitative (PIV and polarography) were performed to characterize the vortex flows studied. A post-processing of PIV measurements, using vortex detection criteria and POD method were has developed.

The polarographic technique, through single probes and one tri-segmented sensor, has contributed to the determination of the wall shear stress. Synchronization between PIV measurements and polarography method, was carried out to understand the spatiotemporal interactions between vortices and the walls.

***Keywords:*** *Lattice Boltzmann Method; Confined flow behind an obstacle; Couette-Taylor flow; Coherent structures; Vortex flow; PIV; POD and detection criteria; Polarography; PIV-polarography synchronization;*

***Titre :*** *Investigations expérimentales et modélisation numérique par la méthode de Lattice Boltzmann (LBM) pour l'étude des transferts dans les écoulements tourbillonnaires*

Ce travail numérique et expérimental, porte sur l'étude des instabilités et sur les transferts dans deux configurations d'écoulements tourbillonnaires : Le sillage derrière un obstacle et l'écoulement de Couette-Taylor. Une simulation numérique, basée sur la méthode de « Lattice Boltzmann » (LBM), a été développée pour étudier la dynamique de l'écoulement confiné autour d'un obstacle dans une configuration géométrique 2D et 3D. Une extension de ce code a été effectuée pour simuler le transfert de masse pariétal. Par la suite, des investigations expérimentales sur les mécanismes de transferts dans le sillage d'un obstacle et dans un écoulement de Couette-Taylor ont été réalisées. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux de la simulation numérique, validant ainsi notre code développé et mettant en valeur la performance de la méthode LBM.

Des résultats expérimentaux qualitatifs (visualisations) et quantitatifs (PIV et polarographie) ont été mis en place pour caractériser les écoulements tourbillonnaires étudiés. Un post-traitement des mesures réalisées par PIV, utilisant des critères de détection et la POD, a été développé.

La méthode polarographique, au moyen de sondes simples et une tri-segmentée, a été utilisée pour la détermination du gradient pariétal de vitesse. Une synchronisation entre les mesures obtenues par PIV et celles déterminées par la polarographie, a permis de mieux comprendre les interactions spatiotemporelles entre les tourbillons et les parois.

***Mots clés :*** *Méthode de Lattice Boltzmann ; Écoulement confiné derrière un obstacle ; Écoulement de Couette-Taylor ; Structures cohérentes ; Écoulements tourbillonnaires ; PIV ; POD et critères de détection ; Polarographie ; Synchronisation PIV-polarographie ;*

***Title:*** *Experimental investigations and numerical simulations using the Lattice Boltzmann Method (LBM) for the study of transfers in vortex flows.*

The numerical and experimental work focuses on the study of instabilities and transfers in two configurations of vortex flows: The wake behind an obstacle and Taylor-Couette flow.

A numerical simulation based on the method of "Lattice Boltzmann" (LBM) has been developed to study the dynamics of the confined flow around an obstacle in a 2D and 3D geometry.

An extension of this code was performed to enable the wall shear stress simulations (mass transfer).

Thereafter, experimental investigations of the mass transfer mechanisms in the wake of an obstacle and in a Taylor-Couette flow were initiated. The results were compared to that obtained by simulation (LBM). The main objective is to check the validity of the developed code and to highlight the LBM performances.

Experimental results, qualitative (visualizations) and quantitative (PIV and polarography) were performed to characterize the vortex flows studied. A post-processing of PIV measurements, using vortex detection criteria and POD method were has developed.

The polarographic technique, through single probes and one tri-segmented sensor, has contributed to the determination of the wall shear stress. Synchronization between PIV measurements and polarography method, was carried out to understand the spatiotemporal interactions between vortices and the walls.

***Keywords:*** *Lattice Boltzmann Method; Confined flow behind an obstacle; Couette-Taylor flow; Coherent structures; Vortex flow; PIV; POD and detection criteria; Polarography; PIV-polarography synchronization;*