



**HAL**  
open science

## Propriété Zéro-Stock pour l'ULS\_BFR

Yuan Bian

► **To cite this version:**

Yuan Bian. Propriété Zéro-Stock pour l'ULS\_BFR : Dans le cadre de minimisation du BFR dans la planification tactique de production. [Rapport de recherche] 15/03/AUTO, Ecole des Mines de Nantes - IRCCyN. 2015. hal-01207065

**HAL Id: hal-01207065**

**<https://imt-atlantique.hal.science/hal-01207065>**

Submitted on 30 Sep 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# PROPRIÉTÉ ZÉRO-STOCK POUR ULS-BFR

YUAN BIAN

RÉSUMÉ. Dans ce document, nous essayons de regarder comment prouver la propriété Zéro-Stock dans le cas de la minimisation du BFR.

Cette recherche prend place dans le cadre du projet RCSM dans lequel nous essayons de proposer des méthodes d'optimisation capable de générer des plans de production minimisant le BFR. Dans un premier temps, une fonction générique modélisant le BFR a été établie et validée : cette fonction permet de déterminer le BFR générer par un plan de production. Dans un second temps, cette fonction a été implantée dans un modèle de base pour la planification de la production. Le but de ce « working paper » est de tenter d'établir une propriété structurelle forte pour ce modèle dont pourront découler des méthodes d'optimisation efficaces.

## 1. RAPPEL DE LA MODÉLISATION

Dans un premier temps, nous rappelons le modèle permettant de minimiser le BFR dans un cadre mono-niveau, mono-produit et à capacité illimitée. Le tableau 1 présente les paramètres utilisés par le modèle.

Paramètre	Définition
$T$	Longueur de l'horizon
$D_t$	Demande pour la période $t$
$h$	Coût unitaire de stockage
$p$	Coût unitaire de production
$s$	Coût fixe de lancement
$a$	Coût unitaire d'achat de matière première
$r_c$	Délai de paiement client
$r_f$	Délai de paiement fournisseur

TABLE 1. Paramètres du modèle

Dans la suite, nous supposons que tous ces paramètres sont positifs ou nuls. Le tableau 2 définit l'ensemble des variables utilisées par le modèle.

---

*Date:* 14 Avril 2015.

*Key words and phrases.* ULS, BFR, ZIO.

Variable	Définition
$Q_t$	Quantité produite à la période $t$
$X_{t,k}$	Quantité produite à la période $t$ pour satisfaire une partie de la demande $D_k$
$Y_t$	indique s'il y a eu lancement de production à la période $t$

TABLE 2. Variables du modèle

Le modèle de planification de la production mono-niveau mono-produit à capacité infinie minimisant le BFR (ULS-BFR) peut se formuler de la façon suivante :

$$\text{Minimiser} \quad BFR = BFR_{prod} + BFR_{lanc} + BFR_{achat} + BFR_{stock} \quad (1)$$

$$X^{(ULS-BFR)} \left\{ \begin{array}{l} BFR_{prod} = \sum_{t=1}^T \sum_{k=t}^T pX_{t,k}(k + r_c - t) \quad (2) \\ BFR_{lanc} = \sum_{t=1}^T \sum_{k=t}^T \frac{sY_t}{Q_t + (1 - Y_t)} X_{t,k}(k + r_c - t) \quad (3) \\ BFR_{achat} = \sum_{t=1}^T \sum_{k=t}^T aX_{t,k}(k + r_c - (t + r_f)) \quad (4) \\ BFR_{stock} = \sum_{t=1}^T \sum_{k=t}^T hX_{t,k}(k - t) \quad (5) \\ Q_t = \sum_{k=t}^T X_{t,k} \quad \forall t \in [1, T] \quad (6) \\ X_{t,k} \leq D_k Y_t \quad \forall (k, t) \in [1, T]^2 \quad (7) \\ Y_t \leq Q_t \quad \forall t \in [1, T] \quad (8) \\ \sum_{k=1}^t X_{k,t} = D_t \quad \forall t \in [1, T] \quad (9) \\ X_{t,k} \geq 0, Y_t \in \{0, 1\} \quad \forall (k, t) \in [1, T]^2 \quad (10) \end{array} \right.$$

La fonction objectif (1) consiste à minimiser la somme de toutes les composantes du BFR. L'équation (2) définit le BFR généré par la production, alors que l'équation (3) calcule celui généré par les lancements en production. L'équation (4) évalue le BFR concernant l'approvisionnement et l'équation (5) celui relatif au stock. La relation (6) calcule la quantité fabriquée durant une période et les équations (7) et (8) définissent lorsqu'il y a lieu de lancer en production. La relation (9) assure que la demande sera bien servie dans les temps et les équations (10) sont les équations d'intégrité et de positivité.

**Notation.** Pour un plan de production  $P$  vérifiant  $X^{(ULS-BFR)}$ , nous noterons  $BFR(P)$  son évaluation via la fonction objectif

## 2. CONJECTURE ZÉRO-STOCK (ZIO)

**Definition.** Nous dirons qu'un plan vérifie la condition zéro-stock (ZIO) si et seulement s'il n'y a production qu'à stock nul. En utilisant nos notations, cela s'écrit :

$$Q_t \times \left[ \sum_{k=1}^{t-1} \left( \sum_{l=t}^T X_{k,l} \right) \right] = 0 \quad \forall t \in [2, T]$$

En d'autres termes, cela s'écrit

$$\begin{cases} Q_t > 0 & \Rightarrow X_{k,l} = 0 & \forall (k,l) \in [1, t-1] \times [t, T] \\ X_{k,l} > 0 & \Rightarrow Q_t = 0 & \forall t \in [k+1, l] \end{cases}$$

**Conjecture.** Il existe un plan  $P^* \in X^{(ULS-BFR)}$  vérifiant la propriété zéro-stock tel que

$$BFR(P^*) = \min_{P \in X^{(ULS-BFR)}} BFR(P)$$

**Idée de preuve.** On suppose qu'on a un plan  $(P) \in X^{(ULS-BFR)}$  ne vérifiant pas (ZIO) et on essaie de montrer qu'on l'améliore au regard de la fonction objectif en le rendant progressivement (ZIO).

Soit  $(P) \in X^{(ULS-BFR)}$  ne vérifiant pas (ZIO). Notons que  $(t, m, n) \in [1, T]^3$  est un triplet tel que  $m < t \leq n$  et une violation de la propriété se trouve à la période  $t$ , c'est-à-dire,  $Q_t \times X_{m,n} > 0$ , (on fabrique à nouveau des produits quand le stock à la période  $t$  n'est pas encore zéro.) De plus, on supposera que la violation de la propriété ZIO se trouve dans plusieurs périodes sur l'horizon de planification avec  $(P)$ .

Considérons le plan  $(P')$  déduit de  $(P)$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} X'_{k,t} &= X_{k,t} & \forall (k, t) \in [1, T]^2 - \{(m, n), (t, n)\} \\ X'_{m,n} &= 0 \\ X'_{t,n} &= X_{t,n} + X_{m,n} \end{aligned}$$

Par construction,  $(P') \in X^{(\text{ULS-BFR})}$  et on y trouve une violation de la propriété de moins par rapport le nombre de violations trouvés dans le  $(P)$ . Maintenant, il faudrait arriver à prouver que  $BFR(P) - BFR(P') \geq 0$ . Pour cela, raisonnons composante par composante.

$$\begin{aligned}
BFR_{prod}(P) - BFR_{prod}(P') &= \sum_{t=1}^T \sum_{k=t}^T p(X_{t,k} - X'_{t,k})(k + r_c - t) \\
&= p[X_{m,n}(n + r_c - m) - X_{m,n}(n + r_c - t)] \\
&= pX_{m,n}(t - m) > 0 \\
BFR_{achat}(P) - BFR_{achat}(P') &= \sum_{t=1}^T \sum_{k=t}^T a(X_{t,k} - X'_{t,k})(k + r_c - (t + r_f)) \\
&= aX_{m,n}(n + r_c - (m + r_f)) \\
&\quad - aX_{m,n}(n + r_c - (t + r_f)) \\
&= aX_{m,n}(t - m) > 0 \\
BFR_{stock}(P) - BFR_{stock}(P') &= \sum_{t=1}^T \sum_{k=t}^T h(X_{t,k} - X'_{t,k})(k - t) \\
&= h[X_{m,n}(n - m) - X_{m,n}(n - t)] \\
&= hX_{m,n}(t - m) > 0
\end{aligned}$$

Ces trois composantes ne posent manifestement pas de problème puisqu'elles sont positives.

$$\begin{aligned}
BFR_{lanc}(P) - BFR_{lanc}(P') &= \sum_{t=1}^T \sum_{k=t}^T \frac{sY_t X_{t,k}}{Q_t + (1 - Y_t)}(k + r_c - t) \\
&\quad - \sum_{t=1}^T \sum_{k=t}^T \frac{sY'_t X'_{t,k}}{Q'_t + (1 - Y'_t)}(k + r_c - t)
\end{aligned}$$

Comme les deux plans sont identiques pour toutes les périodes exceptées aux périodes  $m$  et  $t$  l'expression se simplifie comme suit :

$$\begin{aligned}
 BFR_{lanc}(P) - BFR_{lanc}(P') &= \sum_{k=m}^T \frac{sY_m X_{m,k}}{Q_m + (1 - Y_m)} (k + r_c - m) \\
 &+ \sum_{k=t}^T \frac{sY_t X_{t,k}}{Q_t + (1 - Y_t)} (k + r_c - t) \\
 &- \sum_{k=m}^T \frac{sY'_m X'_{m,k}}{Q'_m + (1 - Y'_m)} (k + r_c - m) \\
 &- \sum_{k=t}^T \frac{sY'_t X'_{t,k}}{Q'_t + (1 - Y'_t)} (k + r_c - t) \\
 &= \underbrace{\sum_{k=m}^T s \left( \frac{Y_m X_{m,k}}{Q_m + (1 - Y_m)} - \frac{Y'_m X'_{m,k}}{Q'_m + (1 - Y'_m)} \right)}_{\text{Partie1}} (k + r_c - m) \\
 &+ \underbrace{\sum_{k=t}^T s \left( \frac{Y_t X_{t,k}}{Q_t + (1 - Y_t)} - \frac{Y'_t X'_{t,k}}{Q'_t + (1 - Y'_t)} \right)}_{\text{Partie2}} (k + r_c - t)
 \end{aligned}$$

Évaluons la Partie 1. Deux cas peuvent se présenter :

Cas 1 :  $Q'_m = 0$ . Dans ce cas

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=m}^T s \left( \frac{Y_m X_{m,k}}{Q_m + (1 - Y_m)} - \frac{Y'_m X'_{m,k}}{Q'_m + (1 - Y'_m)} \right) (k + r_c - m) &= \\
 \sum_{k=m}^T s \frac{X_{m,k}}{Q_m} (k + r_c - m) &> 0
 \end{aligned}$$

Cas 2 :  $Q'_m > 0$ . Dans ce cas

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=m}^T s \left( \frac{Y_m X_{m,k}}{Q_m + (1 - Y_m)} - \frac{Y'_m X'_{m,k}}{Q'_m + (1 - Y'_m)} \right) (k + r_c - m) &= \\
 \sum_{k=m}^T s \left( \frac{X_{m,k}}{Q_m} - \frac{X'_{m,k}}{Q'_m} \right) (k + r_c - m) &= \\
 \frac{s}{Q_m Q'_m} \sum_{k=m}^T (X_{m,k} Q'_m - X'_{m,k} Q_m) (k + r_c - m) &=
 \end{aligned}$$

Cas 2 (suite) :

$$\begin{aligned}
\frac{s}{Q_m Q'_m} \left[ X_{m,n} Q'_m (n + r_c - m) + \sum_{k=m}^{t-1} (X_{m,k} Q'_m - X'_{m,k} Q_m) (k + r_c - m) \right] &= \\
\frac{s}{Q_m Q'_m} \left[ X_{m,n} Q'_m (n + r_c - m) + \sum_{k=m}^{t-1} X_{m,k} (Q'_m - Q_m) (k + r_c - m) \right] &= \\
\frac{s}{Q_m Q'_m} \left[ X_{m,n} Q'_m (n + r_c - m) - \sum_{k=m}^{t-1} X_{m,k} X_{m,n} (k + r_c - m) \right] &= \\
\frac{s X_{m,n}}{Q_m Q'_m} \left[ Q'_m (n + r_c - m) - \sum_{k=m}^{t-1} X_{m,k} (k + r_c - m) \right] &= \\
\frac{s X_{m,n}}{Q_m Q'_m} \left[ \sum_{k=m}^{t-1} X_{m,k} (n + r_c - m) - \sum_{k=m}^{t-1} X_{m,k} (k + r_c - m) \right] &= \\
\frac{s X_{m,n}}{Q_m Q'_m} \sum_{k=m}^{t-1} X_{m,k} (n - k) &> 0
\end{aligned}$$

Ainsi, la Partie 1 ne pose pas de problème car elle est positive. Evaluons la Partie 2 :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=t}^T s \left( \frac{Y_t X_{t,k}}{Q_t + (1 - Y_t)} - \frac{Y'_t X'_{t,k}}{Q'_t + (1 - Y'_t)} \right) (k + r_c - t) &= \\
\sum_{k=t}^T s \left( \frac{X_{t,k}}{Q_t} - \frac{X'_{t,k}}{Q'_t} \right) (k + r_c - t) &= \\
\frac{s}{Q_t Q'_t} \sum_{k=t}^T (X_{t,k} Q'_t - X'_{t,k} Q_t) (k + r_c - t) &= \\
\frac{s}{Q_t Q'_t} \sum_{k=t}^T (X_{t,k} (Q_t + X_{m,n}) - X'_{t,k} Q_t) (k + r_c - t) &= \\
\frac{s}{Q_t Q'_t} \sum_{k=t}^T (X_{t,k} X_{m,n} + Q_t (X_{t,k} - X'_{t,k})) (k + r_c - t) &= \\
\frac{s}{Q_t Q'_t} \left( \left[ \sum_{k=t}^T (X_{t,k} X_{m,n}) (k + r_c - t) \right] - Q_t X_{m,n} (n + r_c - t) \right) &
\end{aligned}$$

ce qui va poser manifestement problème est la quantité :

$$\frac{s X_{m,n} (n + r_c - t)}{Q'_t}$$

Examinons deux cas possibles :

Cas A :  $Q'_t \geq Q_m$ . Nous avons donc

$$\frac{s X_{m,n} (n + r_c - t)}{Q'_t} < \frac{s X_{m,n} (n + r_c - t)}{Q_m}$$

Et essayons de comparer cette quantité à la Partie 1

Cas 1 :  $Q'_m = 0$ . Dans ce cas

$$\begin{aligned}
 \text{Partie 1} &= \sum_{k=m}^T s \frac{X_{m,k}}{Q_m} (k + r_c - m) \\
 &= \sum_{k=m}^T s \frac{X_{m,k}}{Q_m} (k + r_c - m) = \\
 &\sum_{k=m, k \neq n}^T s \frac{X_{m,k}}{Q_m} (k + r_c - m) + \frac{sX_{m,n}}{Q_m} (n + r_c - m) \geq \\
 &\frac{sX_{m,n}}{Q_m} (n + r_c - m) \geq \\
 &\frac{sX_{m,n}}{Q_m} (n + r_c - t)
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, Partie 1 + Partie 2 sera une quantité positive.

Cas 2 :  $Q'_m > 0$ . Dans ce cas

$$\begin{aligned}
 \text{Partie 1} &= \frac{sX_{m,n}}{Q_m Q'_m} \sum_{k=m}^{t-1} X_{m,k} (n - k) \\
 &\frac{sX_{m,n}}{Q_m Q'_m} \sum_{k=m}^{t-1} X_{m,k} (n - k) \geq \\
 &\frac{sX_{m,n}}{Q_m Q'_m} \sum_{k=m}^{t-1} X_{m,k} (n - t) \geq \\
 &\frac{sX_{m,n}}{Q_m} (n - t) \geq \\
 &\frac{sX_{m,n}}{Q'_t} (n - t)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}
 &\frac{s}{Q_t Q'_t} \left( \sum_{k=t}^T (X_{t,k} X_{m,n}) (k + r_c - t) \right) \geq \\
 &\frac{sX_{m,n}}{Q_t Q'_t} \left( \sum_{k=t}^T X_{t,k} (k + r_c - t) \right) \geq \\
 &\frac{sX_{m,n}}{Q_t Q'_t} \left( \sum_{k=t}^T X_{t,k} (t + r_c - t) \right) \geq \\
 &\frac{s r_c X_{m,n}}{Q_t Q'_t} \left( \sum_{k=t}^T X_{t,k} \right) \geq \\
 &\frac{s r_c X_{m,n}}{Q'_t}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$



donc

$$(2.1) + (2.2) = \frac{sX_{m,n}}{Q'_t}(n-t+r_c)$$

Dans ce cas, Partie 1 + Partie 2 sera une quantité positive.

Cas B :  $Q'_t < Q_m$ . On distingue à nouveau les deux cas de la partie 1 :

Cas 1 :  $Q'_m = 0$ . Impossible car mécaniquement  $Q'_t \geq Q_m$ .

Cas 2 :  $Q'_m > 0$ .

La partie 1 s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{sX_{m,n}}{Q_m Q'_m} \sum_{k=m}^{t-1} X_{m,k}(n-k) &\geq \\ \frac{sX_{m,n}}{Q_m Q'_m} (n-t+1) \sum_{k=m}^{t-1} X_{m,k} &\geq \\ \frac{sX_{m,n}}{Q_m Q'_m} (n-t+1) Q'_m &\geq \\ \frac{sX_{m,n}}{Q_m} (n-t+1) & \end{aligned}$$

La partie 2 s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{s}{Q_t Q'_t} \left( \left[ \sum_{k=t}^T (X_{t,k} X_{m,n})(k+r_c-t) \right] - Q_t X_{m,n}(n+r_c-t) \right) &= \\ \frac{sX_{m,n}}{Q_t Q'_t} \left( \left[ \sum_{k=t}^T X_{t,k}(k+r_c-t) \right] - Q_t(n+r_c-t) \right) &\geq \\ \frac{sX_{m,n}}{Q_t Q'_t} \left( r_c \left( \sum_{k=t}^T X_{t,k} \right) - Q_t(n+r_c-t) \right) &\geq \\ \frac{sX_{m,n}}{Q_t Q'_t} (r_c Q_t - Q_t(n+r_c-t)) &\geq \\ \frac{-sX_{m,n}}{Q'_t} (n-t) &\geq \\ \frac{-sX_{m,n}}{Q_m} (n-t) & \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \text{Partie 1 + Partie 2} &\geq \\ \frac{sX_{m,n}}{Q_m} (n-t+1) + \frac{-sX_{m,n}}{Q_m} (n-t) &\geq \\ \frac{sX_{m,n}}{Q_m} &> 0 \end{aligned}$$

Donc partie 1 + partie 2 est positif.

**Résumé des cas traités :**

*Cas A* :  $Q'_t \geq Q_m$ .

$Q'_m = 0$  : *Ok!*

$Q'_m > 0$  : *Ok!*

*Cas B* :  $Q'_t < Q_m$ .

$Q'_m = 0$  : *Ok car impossible*

$Q'_m > 0$  : *Ok!*

Avec la démonstration ci-dessus, on montre que la fonction objectif est améliorée en éliminant une violation de la propriété (*ZIO*). Pour la même raison, on peut toujours l'améliorer s'il y a encore des violations de (*ZIO*). Donc, on en déduit que le plan qui respecte la propriété (*ZIO*) est le plan optimal dans ce cas.

(Yuan Bian) ECOLE DES MINES DE NANTES, LA CHANTRERIE, 4 RUE ALFRED KASTLER  
44307 NANTES CEDEX 3

*E-mail address*, Yuan Bian: [yuan.bian@mines-nantes.fr](mailto:yuan.bian@mines-nantes.fr)